Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Bu sınav kapalı defter-kitap sınavıdır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu"belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Gözetmenlere soru sormayınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Soru	Puan	Sonuç
1	18	
2	22	
3	22	
4	16	
5	22	
Toplam	100	

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$ eğrisi ve $x_0 = 2$ noktası verilsin.

   (a) $\boxed{\text{10 Puan}}$ Türev tanımını kullanarak, bu eğrinin x_0 daki eğimini bulunuz.

   Solution: The required slope is

$$\begin{aligned} m = f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{8}{(2+h)^2}-\frac{8}{2^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{32-8(2+h)^2}{4h(2+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{32}-\cancel{32}-32h-8h^2}{4h(2+h)^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-32-8h)}{4\cancel{h}(2+h)^2} \\ &= \frac{-32-8(0)}{4(2+0)^2} = -\frac{32}{16} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

   p.583, pr.32

   (b) $\boxed{\text{8 Puan}}$ Grafiğin bu noktadaki teğetinin denklemini bulunuz.

   Solution: The equation is $y-2 = -2(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -2x+6}$.

   p.452, pr.24

2. Aşağıdaki limitleri, mevcutsa, bulunuz (**L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir**).

(a) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

İkinci bir yol olarak, türevinalternatif tanımından

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \left[\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right]_{x=1} = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{x=1} = \left[-\frac{1}{(1)^2}\right]_{x=1} = \boxed{-1}$$

p.487, pr.6

(b) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\csc(2x)}{\cos(5x)}$

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x\csc(2x)}{\cos(5x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin(2x)}}{\cos(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)}\frac{1}{\cos(5x)} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)}\frac{1}{\cos(5x)} = \frac{1}{2}(1)(1) = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

p.413, pr.58

3. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$, $L = 1$ ve $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ olsun. $0 < |x-x_0| < \delta$ i sağlayan her x için $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

Solution: First, we want:

$$\begin{aligned}|\sqrt{x+1}-1| < 0.1 \Rightarrow -0.1 < \sqrt{x+1}-1 < 0.1 &\Rightarrow 0.9 < \sqrt{x+1} < 1.1 \\ &\Rightarrow 0.81 < x+1 < 1.21 \\ &\Rightarrow -0.19 < x < 0.21\end{aligned}$$

Moreover

$$|x-0| < \delta \Rightarrow -\delta < x < \delta.$$

Then $-\delta = -0.19$ or $\delta = 0.21$; thus, we choose $\delta = \min\{0.19, 0.21\} = \boxed{0.19}$.

p.573, pr.18

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ Her x için, $2-x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ ise $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ limitini bulunuz. Cevabınızı açıklayınız.

Solution: Notice that both $\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2) = 2$ and $\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x) = 2\cos 0 = 2$ exist and are equal to each other. Hence by Sandwich Theorem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \boxed{2}$

p.56, pr.64

4. (a) $\boxed{\text{10 Puan}}$ a'nın hangi değerleri için, $f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$ fonksiyonu her noktada süreklidir?

Solution: Suppose $f(x)$ is continuous at every x, hence in particular at $x = 2$. Then

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (a^2x - 2a) = 2a^2 - 2a$$

and

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (12) = 12$$

must be equal to each other. Therefore $2a^2 - 2a = 12 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) = 0$. The values for a are $\boxed{-2}$ and $\boxed{3}$.

p.695, pr.37

(b) $\boxed{\text{6 Puan}}$ Aşağıdaki limitleri, mevcutsa, bulunuz (**L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir**).

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right) =$$

Solution:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right) = +\infty - 1 = \boxed{\infty}$$

p.452, pr.24

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right) =$$

Solution:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right) = 1 - \infty = \boxed{-\infty}$$

p.452, pr.24

5. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $y = ax^2 + bx + c$ eğrisi $(1,2)$ noktasından geçip $y = x$ doğrusuna orijinde teğettir. Buna göre a, b ve c yi bulunuz.

Solution: Since the curve passes through $(1,2)$, we have $y(1) = 2 \Rightarrow a+b+c = 2$. The curve is tangent to $y = x$ says two things. First, the curve passes through the origin and so $y(0) = 0 \Rightarrow (a)(0)^2 + (b)(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$; next slope of this curve at the origin and that of $y = x$ do agree. This implies $y' = 2ax + b$ and so $y'(0) = b = 1$. The line $y = x$ has slope 1. So the curve at the origin must have slope 1. Moreover, the curve passes through $(1,2)$ yields the equation $a+b+c = 2$. But we have just found $c = 0$ and $b = 1$. Hence $a = 1$. Therefore the curve $\boxed{y = x^2 + x}$ has the given properties. p.583, pr.32

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7x)\right)^3$ ise dy/dx i bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}\left(1+\cos^2(7x)\right)^3\right] &= \frac{1}{6}(3)\left(1+\cos^2(7x)\right)^2 \frac{d}{dx}\left(1+\cos^2(7x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(7x)\right)^2 \left(0 + 2\cos(7x)\frac{d}{dx}(\cos(7x))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(7x)\right)^2 2\cos(7x)(-7\sin(7x)) \\
&= -7\sin(7x)\cos(7x)\left(1+\cos^2(7x)\right)^2 \\
&= \boxed{-\frac{7}{2}\sin(14x)\left(1+\cos^2(7x)\right)^2}
\end{aligned}$$

p.452, pr.24