



Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci sınavdan **0 (sıfır)** not almış sayılır.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 75 dakika.

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	20	
3	25	
4	20	
5	15	
Toplam	100	

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. 20 puan k 'nın hangi değerleri için $\begin{cases} x + 2y - 4z = 4 \\ 3x - y + 13z = 2 \\ 4x + y + k^2z = k + 3 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin

- (a) çözümü yoktur?
(b) sonsuz çoklukta çözümü vardır?
(c) tek çözümü vardır?

Solution: Verilen sistemin ilaveli matrisi ve indirgenmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & 13 & 2 \\ 4 & 1 & k^2 & k+3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & -7 & k^2+16 & k-13 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & k^2-9 & k-3 \end{array} \right]$$

(a) Eğer $k = -3$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$ elde edilir ve denklem sisteminin çözümü yoktur.

(b) Eğer $k = 3$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ elde edilir ve denklem sisteminin bir parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

(c) Eğer $k \neq 3$ ve $k \neq -3$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+3} \end{array} \right]$ elde edilir ve sistemin tek çözümü vardır.

2. 20 puan $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir bazı olsun. Gram-Schmidt Yöntemini kullanarak $\mathbb{R}^3$ için ortonormal bir baz bulunuz.

Solution:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün ortogonal bir bazıdır.

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektörleri ise $\mathbb{R}^3$ için ortonormal bir baz oluşturur.

3. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ 2x-2y \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan bir dönüşüm olsun.

- (a) 5 puan T dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
- (b) 5 puan Dönüşümün matrisini standart baza göre bulunuz.
- (c) 8 puan $\ker T$ (*NullA*) için bir baz bulunuz.
- (d) 7 puan Dönüşümün görüntü uzayının bir bazını bulunuz.

Solution:

(a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ 'de iki vektör ve k bir sabit olsun.

$$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T \left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) \\ 2(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ y_1 - x_1 \\ 2x_1 - 2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ y_2 - x_2 \\ 2x_2 - 2y_2 \end{bmatrix} = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$$

$$T(k\mathbf{u}_1) = T \left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} kx_1 - ky_1 \\ ky_1 - kx_1 \\ 2kx_1 - 2ky_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ y_1 - x_1 \\ 2x_1 - 2y_1 \end{bmatrix} = kT(\mathbf{u}_1)$$

Dolayısıyla T lineer bir dönüşümdür.

(b)

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ 2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ dönüşümün matrisidir.}$$

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denklem sisteminin çözüm uzayı, dönüşümün çekirdeğidir. Dolayısıyla, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

olduğu kullanıldığında çözüm uzayının bir bazı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olarak bulunur.

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ görüntü uzayının bir bazıdır.

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) 6 puan A matrisinin özdeğerlerini bulunuz .

(b) 8 puan A matrisinin özvektörlerini bulunuz.

(c) 6 puan A matrisi köşegenleştirilebilir mi? Öyle ise, A 'yı köşegenleştiren P matrisini bulunuz.

Solution:

(a) A matrisi üçgensel olduğundan, özdeğerleri köşegen elemanlarıdır. Yani $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \lambda_4 = 3$ olarak bulunur.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ karşılık gelen özvektör $(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sistemi çözülerek bulunur.

$$(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{v} \in \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 3$ karşılık gelen özvektör $(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sistemi çözülerek bulunur.

$$(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{w} \in \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) A matrisinin özdeğerlerinin cebirsel ve geometrik çokkatlılıkları eşit olduğundan A köşegenleştirilebilir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 15 puan k bir sabit olmak üzere $A = \begin{bmatrix} 3 & k & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinden biri $\lambda = 7$ ise

(a) k sayısı kaçtır?

(b) A matrisinin $\lambda = 7$ özdeğerine karşılık gelen birim boylu özvektörünü bulunuz.

Solution:

(a) $\lambda = 7$ bir özdeğer olduğundan $|A - 7I| = 0$ olmalıdır.

$$|A - 7I| = \begin{vmatrix} -4 & k & 5 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -4 & k & 5 & 6 \\ 0 & -4+k & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -4 & k & 5 & 6 \\ 0 & -4+k & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4)(-4+k)(1)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow k = 4$$

(b) $\lambda = 7$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $(A - 7I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sistemi çözülerek bulunur.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Birim boylu özvektör ise

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.