



Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakika.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	
Toplam	100	

1. 20 puan $2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0$
 $-3x_1 - x_2 + x_3 = -1$ denklem sisteminin çözüm kümesini ilaveli matris yardımıyla bulunuz.
 $6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 6$

Solution: Sistemin ilaveli matrisi $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right]$ olarak belirlenir. laveli matrisin indirgenmiş eşelon formu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right]$$

Sistemin iki parametreye bağlı sonsuz çözümü bulunmaktadır. $x_4 = s$ ve $x_5 = t$ alalım.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} - \frac{7}{6}s + \frac{7}{6}t \\ \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t \\ 4 - 2s + 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

2. 20 puan $\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ denklem sisteminin k 'nın hangi değerleri için

- (a) çözümü yoktur?
 (b) sonsuz çözümü vardır?
 (c) tek çözümü vardır?

Soruyu sistemin ilaveli matrisini kullanarak çözünüz.

Solution: Sistemin ilaveli matrisini yazıp indirgeyelim.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & (2+k)(1-k) & 1-k \end{array} \right] \end{aligned}$$

- (a) $k = -2$ ise indirgenmiş ilaveli matris $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$ olur. $k = -2$ olduğunda sistemin çözümü yoktur.

- (b) $k = 1$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ elde edilir. Denklem sisteminin 2 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

- (c) $k \neq -2$ ve $k \neq 1$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array} \right]$ olur. Sistemin tek çözümü vardır.

3. 20 puan $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ olduğunu kullanarak A matrisini bulunuz.

Solution: Bilindiği gibi $(A^{-1})^{-1} = A$ 'dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} (I + 2A)^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ I + 2A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1) \cdot 5 - 3 \cdot 4} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix} \\ 2A &= \begin{bmatrix} -\frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} -\frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{16}{17} \end{bmatrix} \\ A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{22}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{16}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{17} & \frac{3}{34} \\ \frac{2}{17} & -\frac{8}{17} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 20 puan $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-6)$ olmak üzere $\begin{vmatrix} 3g & 3h & 3i \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= (-6) \Rightarrow \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-6) \\ \begin{vmatrix} 3g & 3h & 3i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} &= (-6) \cdot 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3g & 3h & 3i \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-18) \cdot 2 \\ \begin{vmatrix} 3g & 3h & 3i \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{vmatrix} &= (-36) \end{aligned}$$

5. 20 puan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını belirleyiniz.

Solution:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & 1 \\ -28 & -64 & -16 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^{(3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -28 & -64 & -16 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ -28 & -64 & -100 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)(-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -64 & -100 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)[2(-100) - 7(-64)] \\
 &= -248
 \end{aligned}$$