

Your Name / Ad - Soyad

Signature / İmza

 (90 dak.)

Student ID # / Öğrenci No

 (mavi tükenmez!)

Soru	1	2	3	4	5	Toplam
Puan	24	30	30	10	16	110
Sonuç						

Sınav süresi **90 dakika**. Cevap için ayrılan yer yetmiyorsa, sınav kağıdınızdaki boş yerleri kullanabilirsiniz. Cevaplarınızı **AÇIKLAMALISINIZ**. Yeterince açıklanmamış cevaplar –sonuç doğru olsa bile– ya hiç puan alamayacak ya da çok az puan alacak.

1. Aşağıdakileri bulunuz.

(a) (8 Puan) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + x^2} =$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{x(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x} = \frac{2(-1)-3}{-1} = \boxed{5} \end{aligned}$$

p.72, pr.15

(b) (8 Puan) $\frac{d}{dx} (x\sqrt{x^2-1}) =$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x\sqrt{x^2-1}) &= x \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2-1}) + \sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} (x) \\ &= x \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \\ &= \frac{x^2 + x^2 - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \boxed{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}} \end{aligned}$$

p.94, pr.10

(c) (8 Puan) $\int \sin x (3 \cos x + 4)^{4/3} dx =$

Çözüm: $u = 3 \cos x + 4$ olsun. O zaman $du = -3 \sin x dx$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \int \sin x (3 \cos x + 4)^{4/3} dx &= -\frac{1}{3} \int (3 \cos x + 4)^{4/3} (-3) \sin x dx \\ &= -\frac{1}{3} \int u^{4/3} du \\ &= -\frac{1}{3} \left[\frac{u^{4/3+1}}{4/3+1} \right] + C \\ &= -\frac{1}{3} \frac{3}{7} u^{7/3} + C = \boxed{-\frac{1}{7} (3 \cos x + 4)^{7/3} + C} \end{aligned}$$

p.94, pr.10

2. $\mathbb{R}^3$ 'deki $P(1,0,1)$, $Q(2,0,0)$ ve $R(-1,2,2)$ noktaları verilsin.

(a) (10 Puan) P ve R noktalarından geçen $\mathcal{L}$ doğrusunun parametrik denklemlerini yazınız.

Çözüm: Bulacağımız $\mathcal{L}$ doğrusuna paralel bir vektör:

$$\mathbf{v} = \langle -1 - 1, 2 - 0, 2 - 1 \rangle = \langle -2, 2, 1 \rangle.$$

Doğrunun parametrik denklemleri de şöyledir:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

p.83, pr.40



(b) (10 Puan) L doğrusu ve Q noktası arasındaki uzaklığı bulunuz.

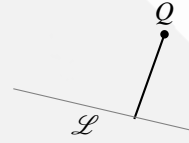
Çözüm: Q noktasından $\mathcal{L}$ doğrusuna uzaklık formülü:

$$d := d\{Q, \mathcal{L}\} = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Burada $\vec{PQ} = \langle 2 - 1, 0 - 0, 0 - 1 \rangle = \langle 1, 0, -1 \rangle$ ve

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \Rightarrow \|\vec{PQ} \times \mathbf{v}\| &= \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = 3 \\ \Rightarrow d &= \frac{3}{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \boxed{1} \end{aligned}$$

p.687, pr.17(a)



(c) (10 Puan) P, Q, R noktalarından geçen düzlemin denklemini yazınız.

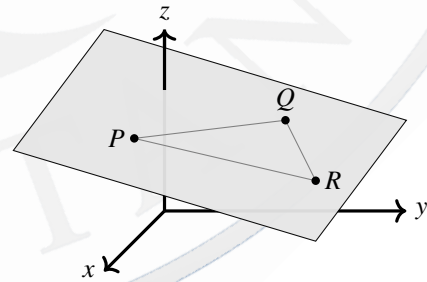
Çözüm: Önce düzlemin normal vektörünü bulalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \vec{PQ} \times \vec{PR} = \langle 1, 0, -1 \rangle \times \langle -2, 2, 1 \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

Düzlemin denklemi şöyledir:

$$\begin{aligned} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot ((x-1)\mathbf{i} + (y-0)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}) &= 0 \\ \Rightarrow 2(x-1) + (y-0) + 2(z-1) &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{2x + y + 2z = 4} \end{aligned}$$

p.687, pr.17(a)



3. (a) (10 Puan) Küresel koordinatları $(\rho, \phi, \theta) = P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ olan noktayı *kartezyen koordinatlara* dönüştürünüz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \Rightarrow x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} = \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ x &= \rho \sin \phi \cos \theta \Rightarrow x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ x &= \rho \sin \phi \cos \theta \Rightarrow x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

(Page 236, problem 33)

- (b) (10 Puan) $y = 2x^2$, $y = 8$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölge y -ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

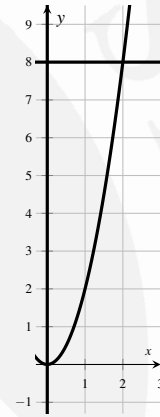
Çözüm: Rastgele kesilen bir dairesel diskin hacmi yarıçapı $R(y) = x = \sqrt{\frac{y}{2}}$ ve dolayısı ile diskin hacmi

$$\Delta V = \pi [R(y)]^2 \Delta y = \pi \left(\sqrt{\frac{y}{2}} \right)^2 \Delta y = \pi \frac{y}{2} \Delta y.$$

Buradan dönel cismin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 \pi \frac{y}{2} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^8 y dy = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^8 \\ &= \frac{\pi}{4} (8^2 - 0^2) = \boxed{16\pi} \end{aligned}$$

p.94, pr.10



Şekle
bakınız.

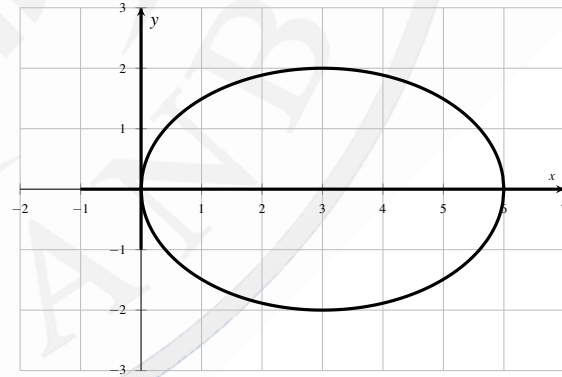
- (c) (10 Puan) $4x^2 + 9y^2 = 24x$ denkleminin grafiğini çiziniz. *Merkezini, tepe noktalarını, odak noktalarını* yazınız.

Çözüm: Kareye tamamlarsak,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 24x \Rightarrow 4x^2 - 24x + 9y^2 = 0 \\ &\Rightarrow 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9y^2 = 0 \\ &\Rightarrow 4(x - 3)^2 + 9y^2 = 36 \\ &\Rightarrow \frac{4(x - 3)^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

Bir elips, merkezi $(x_0, y_0) = (3, 0)$, $a = 3$ ve $b = 2$. Buradan $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. Elipsin odakları: $(x_0 - c, y_0) = (3 - \sqrt{5}, 0)$ ve $(x_0 + c, y_0) = (3 + \sqrt{5}, 0)$. Tepe noktaları da $(x_0 \pm a, y_0) = (3 \pm 3, 0)$ yani $(0, 0)$ ve $(6, 0)$.

p.83, pr.52



4. (10 Puan) Aşağıdaki doğrular paralel midir? Kesişirler mi? Ayırık mıdır? Kesişirlerse, kesim noktasını bulunuz. Cevabınızı açıklayınız.

$$L_1 : \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 2s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$$

Çözüm: L_1 doğrusuna paralel vektör $v_1 = \langle 4, 0, 2 \rangle$ ve L_2 doğrusuna paralel vektör $v_2 = \langle 2, 2, 4 \rangle$ Bu iki vektörden biri diğerinin skaler katı olmadığı için v_1 ve v_2 paralel değildir. Dolayısı ile L_1 ve L_2 paralel doğrular değildir. Yani verilen bu iki doğru ya kesişirler ya da ayrıktrlar. İlk iki denklem:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 4t = 2 + 2s \\ y &= 2 = 2s \Rightarrow s = 1 \\ s &= 1 \Rightarrow x = 2 + 2(1) = 4 \\ x &= 4 \Rightarrow 4 = 4 + 4t \Rightarrow t = 0 \\ t &= 0 \Rightarrow z = 3 + 2(0) = 3 \\ s &= 1 \Rightarrow z = -1 + 4(1) = 3 \end{aligned}$$

Buradan anlaşılıyor ki bu doğrular kesişen doğrulardır ve kesim noktası da $L_1 \cap L_2 = (4, 2, 3)$

p.211, pr.18

5. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Tüm maksimum, minimum ve büküm noktalarını belirtiniz.

- (a) (4 Puan) Fonksiyonun *arttığı* ve *azaldığı* aralıkları bulunuz. *Yerel maksimum* ve *minimum* değerleri bulunuz.

Çözüm: Önce birinci türeve bakalım.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Kökler ± 1 ve dolayısıyla kritik noktalar da ± 1 olur. Şimdi $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ iken, $f'(x) > 0$, böylece grafik artan. Benzer olarak, $x \in (-1, 1)$ iken $f'(x) < 0$ ve buradan grafik azalan olur. Birinci Türev Testi gereğince, grafiğin $(-1, 3)$ noktası bir yerel maksimum ve $(1, -1)$ noktası da bir yerel minimum olur.

- (b) (4 Puan) Grafiğin *aşağı konkav* ve *yukarı konkav* olduğu aralıkları bulunuz. Varsa, *büküm noktaları* yazınız.

Çözüm: İkinci türev:

$$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Buradan $x < 0$ ise, $f''(x) < 0$ olur ve $x > 0$ ise $f''(x) > 0$ olur. Yani grafik $(-\infty, 0)$ aralığında aşağıya konkav ve $(0, \infty)$ aralığında yukarıya konkav olur. Ayrıca $(0, 1)$ noktası bir büküm noktası olur.

p.211, pr.18

- (c) (8 Puan) Fonksiyonun *grafiğini* çiziniz. Dönüm ve büküm noktalarını belirtiniz.

Çözüm:

p.211, pr.18

