

Your Name / Ad - Soyad

Signature / İmza

 (80 dak.)

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	24	28	30	18	100
Sonuç					

Student ID # / Öğrenci No

 (mavi tükenmez!)

Sınav süresi **80 dakika**. Cevap için ayrılan yer yetmiyorsa, sınav kağıdınızdaki boş yerleri kullanabilirsiniz. Cevaplarınızı **AÇIKLAMALISINIZ**. Yeterince açıklanmamış cevaplar –sonuç doğru olsa bile– ya hiç puan alamayacak ya da çok az puan alacak.

1. Aşağıdakileri bulunuz.

(a) (6 Puan) $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x|}}{x}$ ise, tanım kümesini bulunuz.**Çözüm:** Tanım kümesini D ile gösterip ve bir $x \in D$ alalım. Bu durumda

$$2 - |x| \geq 0 \text{ ve } x \neq 0 \text{ olmalıdır. Yani}$$

$$x \in [-2, 2] \text{ ve } x \neq 0 \text{ olmalıdır. Yani}$$

$$x \in [-2, 0) \cup (0, 2] \text{ olmalıdır. Yani } D \subseteq [-2, 0) \cup (0, 2].$$

Karşıt olarak $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$ ise $x \in D$ olur. Dolayısıyla istenen tanım kümesi $D = [-2, 0) \cup (0, 2]$ olarak bulunur.

p.72, pr.15

(b) (8 Puan) $\lim_{z \rightarrow -3} \frac{\frac{3}{z} - \frac{z}{3}}{z + 3}$ limitinin değerini bulunuz.**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -3} \frac{\frac{3}{z} - \frac{z}{3}}{z + 3} &= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{\frac{9-z^2}{3z}}{z + 3} = \lim_{z \rightarrow -3} \frac{9 - z^2}{(z + 3)3z} \\ &= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{(3+z)(3-z)}{(z+3)3z} \\ &= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{3-z}{3z} = \frac{3 - (-3)}{3(-3)} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

p.94, pr.10

(c) (10 Puan) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = ?$ **Çözüm:** We have

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+8-9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2+8}+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

p.72, pr.15

L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir.

L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir.

2. (a) (10 Puan) Türev tanımı kullanarak, $y = x - x^2$ eğrisinin $(2, -2)$ noktasındaki teğetinin eğimini ve denklemini bulunuz.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Çözüm: First the slope for the line at $(2, -3)$ is

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h) - (2+h)^2] - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h-4-4h-h^2)+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(3+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -(3+h) = -3 \end{aligned}$$

Then the equation for the tangent is $y + 2 = -3(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 4}$.

p.72, pr.8

- (b) (8 Puan) $y = ((x^2 + 1)^2 + 1)^2$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm: Zincir Kuralı yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2((x^2 + 1)^2 + 1) \frac{d}{dx} ((x^2 + 1)^2 + 1) \\ &= 2((x^2 + 1)^2 + 1) \left(2(x^2 + 1) \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \right) \\ &= 2((x^2 + 1)^2 + 1) 2(x^2 + 1) (2x) \\ &= \boxed{8x(x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 + 1)} \end{aligned}$$

p.83, pr.40

- (c) (10 Puan) $f(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3} + 1$ olduğuna göre $[0, 8]$ aralığındaki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: Birinci türeve bakarsak,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10}{3}x^{-1/3} - \frac{10}{3}x^{2/3} = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - x^{2/3} \right) \\ &= \frac{10}{3} \frac{1 - x^{2/3}x^{1/3}}{x^{1/3}} \\ &= \frac{10}{3} \frac{1 - x}{x^{1/3}} \end{aligned}$$

buluruz ki bu türevin sıfır olduğu yer $x = 1$ ve tanımsız olduğu yer $x = 0$ dır. Yani kritik noktalar $x = 1$ ve $x = 0$ olur.

x-değeri	f(x)-değeri	maks/min
$x = 0$	$f(0) = 1$	ekstreum yok
$x = 1$	$f(1) = 4$	mutlak maks.
$x = 8$	$f(8) = 20 - 64 + 1 = -43$	mutlak min.

p.83, pr.40

3. (a) (10 Puan) $\int \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + 3 \sin x - 2 \right) dx = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + 3 \sin x - 2 \right) dx &= \int \left(8x^{-1/2} + 3 \sin x - 2 \right) dx \\ &= 8 \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} - 3 \cos x - 2x + C \\ &= \boxed{16\sqrt{x} - 3 \cos x - 2x + C} \end{aligned}$$

(Page 236, problem 33)

(b) (10 Puan) $F(x) = \int_{-x^3}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ ise, $F(-1)$ ve $F'(-1)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $u = -x^3$ olsun. O zaman $\frac{du}{dx} = -3x^2$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F(-1) &= \int_{-(-1)^3}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_1^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0 \\ F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-x^3}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{d}{dx} \left(- \int_1^{-x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \right) \\ &= - \left(\frac{d}{du} \int_1^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) (-3x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+(-x^3)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} \Rightarrow F'(-1) = \frac{3(-1)^2}{\sqrt{1+(-1)^6}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

elde edilir.

p.83, pr.52

(c) (10 Puan) $\int_{-1}^1 \frac{4x^6 - x^3 + 2}{x^3} dx$ belirli integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{4x^6 - x^3 + 2}{x^3} dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{4x^6}{x^3} - \frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (4x^3 - 1 + 2x^{-3}) dx \\ &= \left[x^4 - x + 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right]_{-1}^1 = (1^4 - 1 - 1^{-2}) - ((-1)^4 - (-1) - (-1)^{-2}) \\ &= 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = \boxed{-2} \end{aligned}$$

p.83, pr.52

Açık-
layınız.

4. $y = -x^4 + 6x^2 - 4$ veriliyor. Ayrıca $y' = -4x^3 + 12x = -4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ ve $y'' = -12x^2 + 12 = -12(x + 1)(x - 1)$ kabul edebilirsiniz.

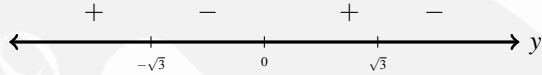
(a) (2 Puan) Tanım kümesini yazınız.

Çözüm: Bu bir polinom fonksiyon. Dolayısıyla tanım kümesi $(-\infty, \infty)$.

p.211, pr.18

(b) (4 Puan) Fonksiyonun arttığı ve azaldığı aralıkları bulunuz. Yerel maksimum ve minimum değerleri bulunuz.

Çözüm: Birinci türev is $y' = -4x^3 + 12x = -4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$. Yani üç kritik nokta $x = 0$ ve $x = \pm\sqrt{3}$ olur. Bu da şu dört aralığı ortaya çıkarır: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ ve $(\sqrt{3}, \infty)$. $(-\infty, -\sqrt{3})$ ve $(0, \sqrt{3})$ aralıklarında grafik artan ve $(-\sqrt{3}, 0)$ ve $(\sqrt{3}, \infty)$ aralıklarında grafik azalır. Ayrıca, $(-\sqrt{3}, 5)$ ve $(\sqrt{3}, 5)$ noktaları mutlak maksimum ve $(0, -4)$ noktası da bir yerel minimum noktasıdır.



p.211, pr.18

(c) (4 Puan) Grafiğin aşağı konkav ve yukarı konkav olduğu aralıkları bulunuz. Varsa, büküm noktalarını yazınız.

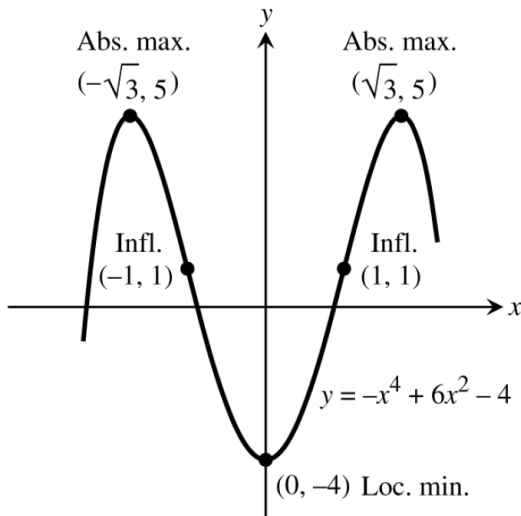
Çözüm: Şimdi ikinci türeve bakarsak, $y'' = -12(x + 1)(x - 1)$ sıfıra eşittir ancak ve ancak $x = \pm 1$. Bu da reel sayı eksenini şu üç aralığa ayırır: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ ve $(1, \infty)$. Burada $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ üzerinde ikinci türev negatif ve $(-1, 1)$ üzerinde, y'' is pozitif olduğundan, grafik $(-1, 1)$ üzerinde yukarıya konkav ve $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ üzerinde aşağıya konkavdır. Dahası $(-1, 1)$ ve $(1, 1)$ büküm noktalarıdır.



p.211, pr.18

(d) (8 Puan) Fonksiyonun grafiğini çiziniz. Dönüm ve büküm noktalarını belirtiniz.

Çözüm:



p.211, pr.18