

Your Name / Ad - Soyad

Signature / İmza

 (80 dak.)

Student ID # / Öğrenci No

 (mavi tükenmez!)

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	18	34	30	18	100
Sonuç					

Sınav süresi **80 dakika**. Cevap için ayrılan yer yetmiyorsa, sınav kağıdınızdaki boş yerleri kullanabilirsiniz. Cevaplarınızı **AÇIKLAMALISINIZ**. Yeterince açıklanmamış cevaplar –sonuç doğru olsa bile– ya hiç puan alamayacak ya da çok az puan alacak.

1. Aşağıdakileri bulunuz.

(a) (8 Puan) $\int \frac{x dx}{(7x^2 + 3)^5}$ belirsiz integralini bulunuz.**Çözüm:** Değişken değiştirme yaparız. $u = 7x^2 + 3$ olsun. O zaman $du = 14x dx$ olur. Buradan

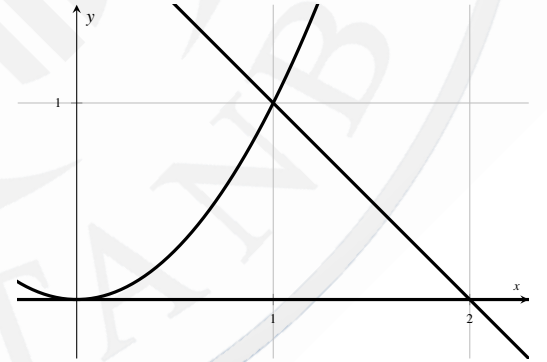
$$\begin{aligned}
 \int \frac{x dx}{(7x^2 + 3)^5} &= \frac{1}{14} \int \frac{14x dx}{(7x^2 + 3)^5} \\
 &= \frac{1}{14} \int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{14} \int u^{-5} du \\
 &= \frac{1}{14} \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{1}{56} u^{-4} + C \\
 &= -\frac{1}{56(7x^2 + 3)^4} + C
 \end{aligned}$$

p.72, pr.15

(b) (10 Puan) $y = x^2$ parabolü, $x + y = 2$ doğrusu ve x -ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.**Çözüm:** x -ekseni ve $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ arasındaki alan *artı* the area of a triangle ($x + y = 2$, $x = 1$ ve $y = 0$ tarafından oluşan üçgenin alanı) tabanı 1 ve yüksekliği 1. Böylece,

$$\begin{aligned}
 \text{TOPLAM ALAN} &= \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2}(1)(1) \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}
 \end{aligned}$$

p.94, pr.10



2. $\mathbb{R}^3$ deki $\mathbb{R}^3$ de $P(0,0,0)$, $Q(0,2,1)$ ve $R(1,3,0)$ noktaları verilsin.

(a) (8 Puan) $Q(0,2,1)$ ve $R(1,3,0)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} d\{Q,R\} &= d\{Q(0,2,1), R(1,3,0)\} = \sqrt{(1-0)^2 + [-3-(-2)]^2 + (0-1)^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

p.72, pr.15

(b) (8 Puan) $\text{proj}_{\vec{PQ}}(\vec{PR})$ izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm: Önce $\vec{PQ} = (0-0)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = \boxed{2\mathbf{j} + \mathbf{k}}$ ve $\vec{PR} = (1-0)\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \boxed{\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}$. İzdüşüm formülü:

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{PQ}} \vec{PR} &= \left(\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}} \right) \vec{PQ} \\ &= \left(\frac{(0)(1) + (2)(3) + (1)(0)}{(1)(1) + (3)(3) + (0)(0)} \right) \vec{PQ} \\ &= \frac{6}{10} \vec{PQ} = \frac{3}{5} (2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \boxed{\frac{6}{5}\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}} \end{aligned}$$

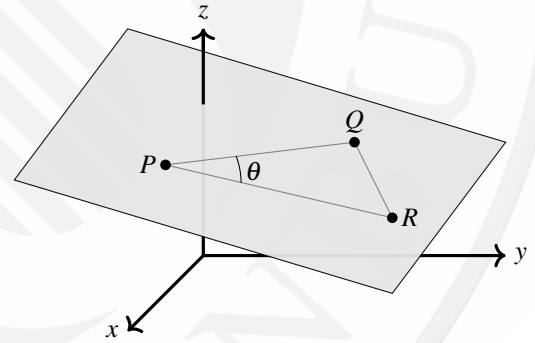
p.83, pr.52

(c) (8 Puan) P köşesindeki açı θ ise, $\cos \theta$ nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{||\vec{PQ}|| \cdot ||\vec{PR}||} \\ &= \frac{6}{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (1)^2} \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (0)^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \boxed{\frac{6}{5\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

p.83, pr.40

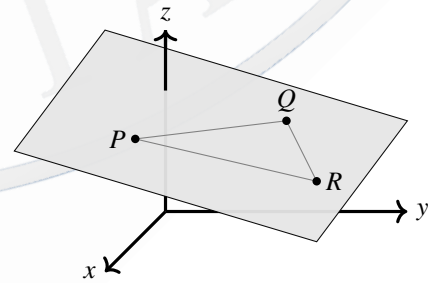


(d) (10 Puan) $\triangle(PQR)$ üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \Rightarrow \text{ALAN} &= \frac{1}{2} ||\vec{PQ} \times \vec{PR}|| \\ &= \frac{1}{2} ||-3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}|| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

p.687, pr.17(a)



3. (a) (10 Puan) Kutupsal koordinatları $P(-1, 3\pi)$ olan noktanın *kartezyen koordinatlarını* bulunuz. Kartezyen koordinatları $Q(1, -1)$ noktasının *kutupsal koordinatlarını* bulunuz.

Çözüm: $P(-1, 3\pi)$ noktasında $r = -1$ ve $\theta = 3\pi$ olduğundan,

$$x = r \cos \theta = (-1)(\cos(3\pi)) = (-1)(-1) = 1$$

$$y = r \sin \theta = (-1)(\sin(3\pi)) = (-1)(0) = 0,$$

kartezyen koordinatlar $P(-1, 0)$ olur.

Şimdi $Q(1, -1)$ noktasında $x = 1$ ve $y = -1$ olduğundan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ veya } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

olur. Dolayısıyla tüm kutupsal koordinatlar $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ olmak üzere $Q(\pm\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$ veya

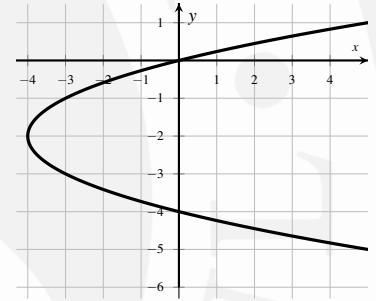
$$Q(\pm\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi) \text{ olur.}$$

(Page 236, problem 33)

- (b) (10 Puan) $x = 4y + y^2$ parabolünün tepe noktasını, odak noktasını ve doğrultmanını (directrix) bulunuz.

Çözüm: Kareye tamamlarsak, $x = 4y + y^2 \Rightarrow x + 4 = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x = (y + 2)^2 + 4$ buluruz. Bu denklem $x = a(y - b)^2 + c$ biçimindedir. Bu formdaki bir parabolün tepe noktasının $V(c, b)$, odak noktasının $F(c + \frac{1}{4a}, b)$ ve doğrultman denklemi de $x = c - \frac{1}{4a}$. Bizim durumumuza dönersek, $a = 1$, $b = -2$ ve $c = 4$ tür. Tepe noktası koordinatları $V(-4, -2)$ dir. Bu tepe noktasından sağa ve sola $\frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$ birim sayarsak odak ve doğrultmanı buluruz. Dolayısıyla odak noktası $F(-4 + \frac{1}{4}, -2) = F(-\frac{15}{4}, -2)$ ve doğrultmanın denklemi de $x = -4 - \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{17}{4}$ olarak bulunur.

p.94, pr.10



Açıklayınız.

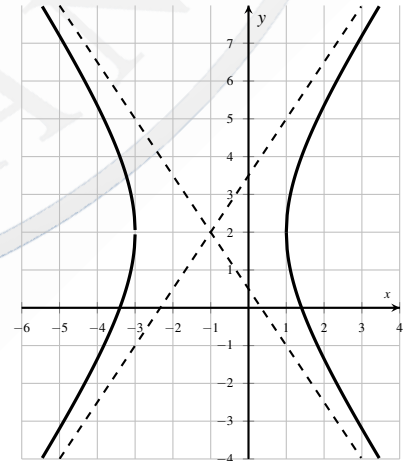
- (c) (10 Puan) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ hiperbolünün merkezini, tepe noktalarını, odak noktalarını ve asimptotlarını yazınız.

Çözüm: İlk olarak

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünün $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olmak üzere odakları $F_1(x_0 - c, y_0)$ ve $F_2(x_0 + c, y_0)$, merkezi $C(x_0, y_0)$, tepe noktaları $(x_0 \pm a, y_0)$, ve asimptotları da $y = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$ dır. Şimdi $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $a = 2$, $b = 3$ için $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Odaklar $F_1(-1 - \sqrt{13}, 2)$ ve $F_2(-1 + \sqrt{13}, 2)$, merkezi $C(-1, 2)$, tepe noktaları $(-1 \pm 2, 2)$, ve asimptotları da $y = \pm \frac{3}{2}(x + 1) + 2$ dır.

p.83, pr.52



4. $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki adımlarla çiziniz.

(a) (2 Puan) *Tanım kümesini yazınız.*

Çözüm: Tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur.

p.211, pr.18

(b) (4 Puan) Fonksiyonun *arttığı ve azaldığı aralıkları bulunuz. Yerel maksimum ve minimum değerleri bulunuz.*

Çözüm: İlk olarak $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) = 0$ olduğundan kritik noktalar $x = 0, x = 1, x = -1$ dir. Birinci türev $(-\infty, -1)$ ve $(0, 1)$ aralıklarında negatif dolayısıyla grafik bu aralıklarda azalır. Benzer olarak, birinci türev $(-1, 0)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında pozitif olup grafik bu aralıklarda artar. İkinci türev testinden de görülebilir ki grafiğin $(-1, -4)$ ve $(1, -4)$ noktaları bir yerel minimum olup $(0, -3)$ noktası da bir yerel maksimum olur.

p.211, pr.18

(c) (4 Puan) Grafiğin *aşağı konkav ve yukarı konkav olduğu aralıkları bulunuz. Varsa, büküm noktalarını yazınız.*

Çözüm: İkinci türev $y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 4(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 0$ olduğundan kökler $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. İkinci türev $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ve $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ aralıklarında pozitif olduğundan, grafik bu aralıklarda yukarıya konkavdır. Yine ikinci türev, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ aralığında negatif olduğundan, grafik bu aralıkta aşağıya konkavdır. Ayrıca, ikinci türev $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ noktalarında işaret değiştirdiği için, grafiğin bu noktalarda büküm noktası vardır.

p.211, pr.18

(d) (8 Puan) Fonksiyonun *grafiğini çiziniz. Dönüm ve büküm noktalarını belirtiniz.*

