Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	33	
2	35	
3	32	
Toplam	100	

1. (a) $\boxed{\text{13 Puan}}$ $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x = 3$ deki yerel ekstremum değeri 1 olduğuna göre a ve b nin değerlerini bulunuz. Bu yerel ekstremum değer bir yerel maksimum değer midir yoksa yerel minimum değer midir? Cevabınızı açıklayınız.

Solution:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x^2-1)-2x(ax+b)}{(x^2-1)^2} = \frac{-(ax^2+bx+a)}{(x^2-1)^2}$$

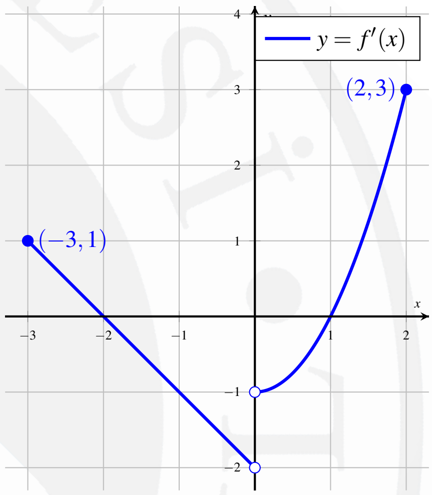
$$f'(3) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{64}(9a+6b+a) = 0 \Rightarrow 5a+3b = 0.$$

We reqire also that $f(3) = 1$. Thus $1 = \dfrac{3a+b}{3^2-1} \Rightarrow 3a+b = 8$. Solving both equations yields $a = 6$ and $b = -10$. Now, $f'(x) = \dfrac{-2(3x-1)(x-3)}{(x^2-1)^2}$ so that

Thus f' changes sign from positive to negative so there is a local maximum at $x = 3$

p.257, pr.4

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ Şekilde $y = f'(x)$ türevinin grafiği veriliyor. Buna göre:



i. f fonksiyonunun arttığı aralıkları yazınız.

Solution: The function f is increasing on $[-3,-2]$ and $[1,2]$, since over these intervals, the graph of f' is above x-axis.

p.258, pr.20

ii. f fonksiyonunun azaldığı aralıkları yazınız.

Solution: The function f is decreasing on $[-2,0)$ and $(0,1]$, since over these intervals, the graph of f' is below x-axis.

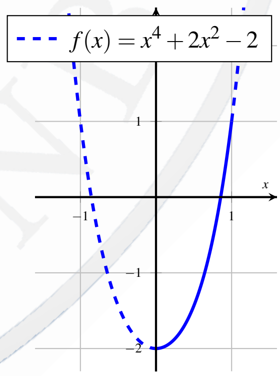
p.258, pr.20

iii. f nin yerel maksimum/minimum değerlerini ve hangi noktalarda olduğunu yazınız.

Solution: The local maximum values occur only at $x = -2$ and $x = 2$; local minimum values occur only at $x = -3$ and $x = 1$ provided f is continuous at $x = 0$.

p.258, pr.20

(c) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığında tam bir adet kökü olduğunu gösteriniz.



Solution: Let $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2$. Then $f'(x) = 4x^3 + 4x$. Since $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ and $f'(x) \geq 0$ for $0 \leq x \leq 1$, we may conclude from the Intermediate Value Theorem that $f(x) = 0$ has exactly one solution when $0 \leq x \leq 1$.

p.257, pr.13(a)

2. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $y = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ ise, türevini bulunuz.

(b) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $x^3y^3 + y^2 = x + y$ eğrisinin $(1,1)$ ve $(1,-1)$ noktalarındaki eğimini bulunuz.

(c) $\boxed{\text{11 Puan}}$ $y = 3\sin(2x)$ and $x = t^2 + \pi$ olduğuna göre $\dfrac{dy}{dt}$ nin $t = 0$ daki değerini bulunuz.

Solution:

$$x = t^2 + \pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t; y = 3\sin(2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6\cos(2x) = 6\cos(2(t^2+\pi)) = 6\cos(2t^2);$$

thus $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \left(6\cos(2t^2)\right)\cdot(2t)$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = [6\cos(0)]\cdot(0) = \boxed{0}$$

p.192, pr.57

3. (a) $\boxed{\text{11 Puan}}$ $f(x) = x^2$, $L = 4$, $c = -2$, $\varepsilon = 0.5$ olsun. Limitin tanımındaki $0 < |x-c| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

Solution: Method 1: We want

$$|f(x)-L| = |x^2-4| < \varepsilon = 0.5 \Rightarrow -0.5 < x^2-4 < 0.5 \Rightarrow 3.5 < x^2 < 4.5 \Rightarrow \sqrt{3.5} < |x| < \sqrt{4.5}$$
$$\Rightarrow -\sqrt{4.5} < x < -\sqrt{3.5} \text{ for } x \text{ near } -2.$$

We also want

$$0 < |x-(-2)| < \delta \Rightarrow -\delta < x+2 < \delta \Rightarrow -\delta-2 < x < \delta-2.$$
Then $-\delta - 2 = -\sqrt{4.5} \Rightarrow \delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.213$,
or $\delta - 2 = -\sqrt{3.5} \Rightarrow \delta = 2 - \sqrt{3.5} \approx 0.1292$;
thus $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12$

Method 2: $L = \lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$. Consider $|f(x)-L| = |x^2-4| = |x+2||x-2|$, and suppose $\delta \le 1$. Then $0 < |x-c| = |x+2| < \delta$ implies $-1 < x+2 < 1$ or $-3 < x < -1$, so adding -2 we get that $-5 < x-2 < -3$ and $|x+2||x-2| < 5\delta$. But $5\delta = 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ if $\delta = \frac{1}{10} = 0.1$ and any value of $\delta \le 0.1$ will work.

p.80, pr.23

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ Mevcutsa, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ limitini bulunuz.

Solution: By factoring the bottom, we have

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{1-\sqrt{x}}}{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

p.115, pr.11

(c) $\boxed{\text{11 Puan}}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2, \quad x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olduğu noktaları bulunuz.

Solution: For continuity at $x = 2$, we compute

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{2^2+(2)(2)+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Since $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$, f is continuous at $x = 2$. But it is discontinuous at $x = -2$, since $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ does not exist. Consequently, f is continuous at every $x \neq -2$.

p.98, pr.30