

Mat216 Çalışma Ödevi 1

Asuman Özer , 2018

October 19, 2018

1. Hangi m değerleri için $y = e^{mx}$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümüdür.

(a) $y' + 2y = 0$

(b) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(c) $5y' = 2y$

(d) $2y'' + 7y' - 4y = 0$

2. Hangi m değerleri için $y = x^m$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümüdür.

(a) $xy'' - 2y' = 0$

(b) $x^2y'' + 7xy' + 15y = 0$

3. $y = \frac{1}{1 + c_1 e^{-x}}$ fonksiyonu, birinci mertebeden $y' = y - y^2$ diferansiyel denkleminin **bir parametrelili** çözüm ailesidir. Aşağıda verilen başlangıç koşullarını ve bu diferansiyel denklemini içeren birinci mertebeden başlangıç değer problemlerinin bir çözümünü bulunuz.

(a) $y(0) = -\frac{1}{3}$

(b) $y(-1) = 2$

4. $y = \frac{1}{x^2 + c}$ fonksiyonu, birinci mertebeden $y' + 2xy^2 = 0$ diferansiyel denkleminin **bir parametrelili** çözüm ailesidir. Aşağıda verilen başlangıç koşullarını ve bu diferansiyel denklemini içeren birinci mertebeden başlangıç değer probleminin bir çözümünü bulunuz ve çözümün tanımlandığı en geniş I aralığını bulunuz.

(a) $y(2) = \frac{1}{3}$

(b) $y(-2) = \frac{1}{2}$

(c) $y(0) = 1$

(d) $y(\frac{1}{2}) = -4$

5. $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ fonksiyonu, ikinci mertebeden $x'' + x = 0$ diferansiyel denkleminin **çift parametrelili** çözüm ailesidir. Aşağıda verilen başlangıç koşullarını ve bu diferansiyel denklemin içeren ikinci mertebeden başlangıç değer probleminin bir çözümünü bulunuz.

- (a) $x(0) = -1, x'(0) = 8$
- (b) $x(\frac{\pi}{2}) = -1, x'(\frac{\pi}{2}) = 1$
- (c) $x(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, x'(\frac{\pi}{6}) = 0$
- (d) $x(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, x'(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$

6. Aşağıdaki ayrılabilir değişkenli diferansiyel denklemleri çözünüz.

- (a) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$
- (b) $dx + e^{3x} dy = 0$
- (c) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$
- (d) $y \ln x \frac{dx}{dy} = (\frac{y+1}{x})^2$

7. Aşağıdaki denklemlerin tam diferansiyel denklem olup olmadığını bulup çözünüz.

- (a) $(2x - y)dx + (3y + 7)dy = 0$
- (b) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$
- (c) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$
- (d) $(\sin y - y \sin x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$
- (e) $(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x = 0$
- (f) $(1 + \ln x + \frac{y}{x})dx = (1 - \ln x)dy$
- (g) $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)dy = 0$
- (h) $(4t^3y - 15t^2 - y)dt + (t^4 + 3y^2 - t)dy = 0$
- (i) $(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2 + y^2})dt + (ye^y + \frac{t}{t^2 + y^2})dy = 0$

8. Aşağıdaki denklemlerin tam diferansiyel denklem olmasını sağlayan k değerini bulunuz.

$$(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \sin y)dy = 0$$

9. Aşağıdaki denklemlerin tam diferansiyel denklem olmadığını gösteriniz. Verilen integrasyon çarpanı ile çarptıktan sonra tam diferansiyel denkleme dönüştüğünü gösterip çözünüz.

$$(a) (-xy \sin x + 2y \cos x)dx + 2x \cos x dy = 0, \quad \mu(x, y) = xy$$

- (b) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$, $\mu(x, y) = (x + y)^2$
10. Aşağıdaki problemler için uygun integrasyon çarpanı kullanarak diferansiyel denklemleri çözünüz.
- (a) $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$
(b) $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$
(c) $\cos x dx + (1 + \frac{2}{y} \sin x)dy = 0$
(d) $(10 - 6y + e^{3x})dx - 2ydy = 0$
(e) $(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3 \sin y)dy = 0$
(f) $x dx + (x^2y + 4y)dy = 0$, $y(4) = 0$
11. $(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0$ diferansiyel denklemin verilsin.
- (a) $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$ nin verilen diferansiyel denklemin bir parametrelili çözümü olduğunu gösteriniz.
(b) $y(0) = -2$ ve $y(1) = 1$ başlangıç koşullarının aynı kapalı çözümü sağladığını gösteriniz.
12. Aşağıdaki problemler için uygun değişken dönüşümü kullanarak diferansiyel denklemleri çözünüz.
- (a) $(x - y)dx + xdy = 0$
(b) $(x + y)dx + xdy = 0$
(c) $x dx + (y - 2x)dy = 0$
(d) $ydx = 2(x + y)dy$
(e) $(y^2 + yx)dx - x^d y = 0$
(f) $(y^2 + yx)dx + x^d y = 0$
(g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$
(h) $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$
(i) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $x > 0$
13. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.
- (a) $xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$, $y(1) = 2$
(b) $(x^2 + 2y^2) \frac{dy}{dx} = xy$, $y(-1) = 1$
(c) $(x + ye^{\frac{y}{x}})dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$, $y(1) = 0$

(d) $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0, \quad y(1) = e$

14. Aşağıdaki Bernoulli denklemlerini uygun değişken dönüşümü kullanarak çözünüz.

(a) $x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

(c) $t^2 \frac{dy}{dt} + y^2 = ty$

(d) $3(1 + t^2) \frac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

(e) $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

(f) $y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + y^{\frac{1}{2}} = 1, \quad y(0) = 4$

15. Aşağıdaki $\frac{dx}{dy} = f(Ax + By + C)$ formundaki diferansiyel denklemleri uygun değişken dönüşümü kullanarak çözünüz.

(a) $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

(b) $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$

(c) $\frac{dy}{dt} = \sin(x + y)$

(d) $\frac{dy}{dt} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

(e) $\frac{dy}{dt} = 1 + e^{y-x+5}$

(f) $\frac{dy}{dx} = \cos(x + y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$

(g) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2} = 1, \quad y(-1) = -1$