



=

ADI: SOYADI: ÖĞRENCİ NO: BÖLÜM: ÖĞR. ÜYESİ: ☐ M.Tuba Gülpınar ☒ Sezgin SezerİMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	22	
3	23	
4	10	
5	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 75 dakika.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. 20 puan $t > 0$ olmak üzere $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{4}{t} \frac{dy}{dt} = \frac{5}{t^4}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: İndirgenebilir (bağımlı değişkeni içermeyen) diferansiyel denklemdir. Buna göre

$$p = y' \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{4}{t} \frac{dy}{dt} = \frac{5}{t^4} \Rightarrow \frac{dp}{dt} + \frac{4}{t} p = \frac{5}{t^4}$$

Lineer diferansiyel denklem haline dönüştü. İntegrasyon çarpanını bulalım.

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{4}{t} dt} = e^{4 \ln t} = t^4$$
$$t^4 p = \int t^4 \frac{5}{t^4} = \int 5 dt = 5t + C_1$$
$$p = \frac{5t}{t^4} + \frac{C_1}{t^4}$$
$$y' = \frac{5}{t^3} + \frac{C_1}{t^4}$$
$$\int dy = \int \left(\frac{5}{t^3} + \frac{C_1}{t^4} \right) dt$$
$$y(t) = -\frac{5}{2t^2} - \frac{C_1}{3t^3} + C_2$$



2. 22 puan $(xy - xe^x)dx + (x^2 + x \cos y)dy = 0$, $y(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Solution: $M(x, y) = xy - xe^x$ ve $N(x, y) = x^2 + x \cos y$ alalım. $M_y = x$ ve $N_x = 2x + \cos y$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklem değildir. us take $M(x, y) = xy - xe^x$ and $N(x, y) = x^2 + x \cos y$. $M_y = x \neq N_x = 2x + \cos y$, so it is not an exact equation.

$$\lambda = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{x - 2x - \cos y}{x^2 + x \cos y} dx} = e^{\int \frac{-x - \cos y}{x(x + \cos y)} dx} = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x} ((xy - xe^x)dx + (x^2 + x \cos y)dy = 0)$$
$$(y - e^x)dx + (x + \cos y)dy = 0$$

$P(y, x) = y - e^x$ ve $Q(x, y) = x + \cos y$ olarak alalım. $P_y = 1 = Q_x$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla $F_x dx + F_y dy = 0$ olacak şekilde bir $F(x, y) = 0$ fonksiyonu vardı.

$$F_x = y - e^x \Rightarrow F(x, y) = \int (y - e^x) dx = yx - e^x + h(y)$$
$$F_y = x + \cos y \Rightarrow F_y = x + h'(y) = x + \cos y$$
$$h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \int \cos y dy = \sin y + C$$
$$F(x, y) = yx - e^x + \sin y + C = 0$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 - e^0 + \sin 0 + C = 0 \Rightarrow C = 1$$
$$yx - e^x + \sin y + 1 = 0$$

3. 23 puan $y' = \frac{2y}{3x+y}$, $y(1) = 2$ başlangıç değeri problemini $y = vx$ değişken dönüşümü yardımıyla çözünüz.

Solution: Verilen denklem homojen denklemdir.

$$\begin{aligned}y &= vx \Rightarrow y' = xv' + v \\y' &= \frac{2y}{3x+y} \Rightarrow xv' + v = \frac{2vx}{3x+vx} \\xv' + v &= \frac{2v}{3+v} \\x \frac{dv}{dx} &= \frac{2v}{3+v} - v = -\frac{v+v^2}{3+v} \\ \frac{3+v}{v(v+1)} dv &= -\frac{1}{x} dx \\ \int \frac{3+v}{v(v+1)} dv &= \int -\frac{1}{x} dx \\ \int \left(\frac{3}{v} - \frac{3}{v+1} \right) &= \int -\frac{1}{x} dx \\ 3 \ln |v| - 3 \ln |v+1| &= -\ln |x| + C \\ 3 \ln \left| \frac{v}{v+1} \right| &= -\ln |x| + C \\ 3 \ln \left| \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} \right| &= -\ln |x| + C \Rightarrow 3 \ln \left| \frac{y}{y+x} \right| = -\ln |x| + C \\ \left(\frac{y}{y+x} \right)^3 &= \frac{A}{x} \quad (A = e^C) \\ y(1) = 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{2+1} \right)^3 &= \frac{A}{1} \Rightarrow A = \frac{8}{27} \\ \left(\frac{y}{y+x} \right)^3 &= \frac{8}{27x}\end{aligned}$$



4. 10 puan $y''' - 2y'' + 17y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: Öncelikle karakteristik denklemi ve köklerini bulalım.

$$r^3 - 2r^2 + 17r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 2r + 17) = 0 \Rightarrow r[(r - 1)^2 + 16] = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1 + 4i, r_3 = 1 - 4i$$

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^x \cos 4x + c_3 e^x \sin 4x$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x \cos 4x + c_3 e^x \sin 4x$$

5. 25 puan $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + \cos x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 4 = 0 &\Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2 \Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \\ y_p(x) &= (Ax + B)x^2 e^{2x} + C \cos x + D \sin x = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + C \cos x + D \sin x \\ y'_p(x) &= (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} - C \sin x + D \cos x \\ y'_p &= 2Ax^3 e^{2x} + (3A + 2B)x^2 e^{2x} + 2Bx e^{2x} - C \sin x + D \cos x \\ y''_p(x) &= (6Ax + 2B)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} - C \cos x - D \sin x \\ y''_p(x) &= 4Ax^3 e^{2x} + (12A + 4B)x^2 e^{2x} + (6A + 8B)x e^{2x} + 2B e^{2x} - C \cos x - D \sin x \\ y'' - 4y' + 4y &= xe^{2x} + \cos x \\ [4Ax^3 e^{2x} + (12A + 4B)x^2 e^{2x} + (6A + 8B)x e^{2x} + 2B e^{2x} - C \cos x - D \sin x] \\ - 4[2Ax^3 e^{2x} + (3A + 2B)x^2 e^{2x} + 2Bx e^{2x} - C \sin x + D \cos x] \\ + 4[(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + C \cos x + D \sin x] &= xe^{2x} + \cos x \\ (4A - 8A + 4A)x^3 e^{2x} + (12A + 4B - 12A - 8B + 4B)x^2 e^{2x} + (6A + 8B - 8B)x e^{2x} + 2B e^{2x} \\ + (-C - 4D + 4C) \cos x + (-D + 4C + 4D) \sin x &= xe^{2x} + \cos x \\ 6A x e^{2x} + 2B e^{2x} + (3C - 4D) \cos x + (4C + 3D) \sin x &= xe^{2x} + \cos x \\ A = \frac{1}{6}, B = 0, C = \frac{3}{25}, D = \frac{4}{25} \\ y_p = \frac{1}{6} x^3 e^{2x} + \frac{3}{25} \cos x + \frac{4}{25} \sin x \\ y(x) = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x} + \frac{3}{25} \cos x + \frac{4}{25} \sin x \end{aligned}$$