



Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Professor' s Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta “gidiş yolu” belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz.**
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Soru	Puan	Sonuç
1	40	
2	35	
3	25	
Toplam	100	

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. (a) 15 Puan Bir kutunun hacmini modelleyen $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ fonksiyonunun $0 < x < 5$ aralığındaki ekstrem (maksimum-minimum) değerlerini bulunuz.

Solution:

$$\text{İr } V(x) = 160x - 52x^2 + 4x^3$$

$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2 = 4(40 - 26x + 3x^2) = (3x - 20)(x - 2) = 0$ $x_1 = \frac{20}{3} \cong 6.6$ ve $x_2 = 2$ bulunur. Fakat $0 < x < 5$ olduğundan bu aralığa giren x değeri $x = x_2 = 2$ olarak bulunur. Yani, V' 'nin $(0, 5)$ aralığındaki ekstrem değeri $x = 2$ 'dir.

- (b) 10 Puan $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında sadece bir **sifirının** olduğunu gösteriniz.

Solution: $t = 0 \Rightarrow g(0) = \sqrt{0} + \sqrt{1} - 4 = -3$

Bir $t = 15 \in (0, \infty) \Rightarrow \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4 = \sqrt{15} + \sqrt{16} - 4 = \sqrt{15}$ $g(0) < 0$ ve $\sqrt{15} > 0$ olduğundan **ara değer teoreminden** g fonksiyonu x eksenini $(0, 15)$ aralığı içindeki bir noktada keser. Yani, bu aralıkta en az bir kökü vardır.

Şimdi de kökün tek olduğunu garantileyelim. Bunun için fonksiyonun türevine bakalız: $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$. Bu fonksiyon $(0, \infty)$ aralığında daima pozitif (yani, artan)dır. Dolayısıyla g' 'nin bu aralıkta ikinci bir kökünün olması olanaksızdır.

- (c) 15 Puan (Çevrenin Minimizasyonu): Alanı 16cm^2 olan bir dikdörtgenin çevresi en az kaç cm olabilir? Dikdörtgenin boyutlarını belirtiniz.

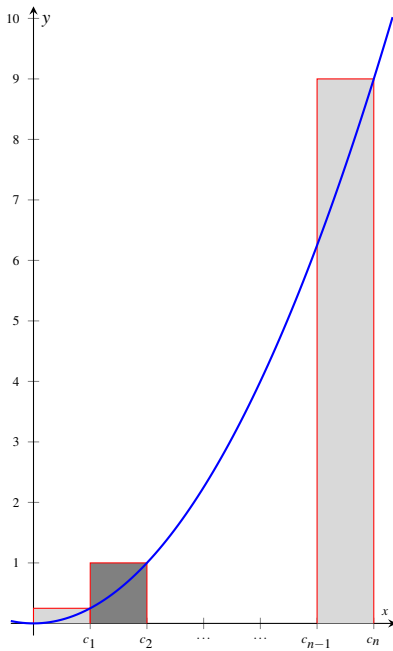
Solution: İr Alan: $A = xy \Rightarrow y = \frac{16}{x}$

$$\text{Çevre: } \zeta = 2(x + y) \Rightarrow \zeta(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = \frac{2x^2 + 32}{x}$$

$$\zeta'(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{Kritik Noktalar : } x = \mp 4 \text{ ve } x = 0$$

Kenar uzunluğu 0 olamayacağından, kenar uzunlukları: $x = 4$ ve $y = \frac{16}{4} = 4$ bulunur. $x = 4$ için $\zeta''(x) = \frac{32}{x^3} > 0$ olduğundan $x = 4$ de yerel min vardır. Çevrenin minimum değeri: $\zeta(x) = 2(4 + 4) = 16\text{cm}$ 'dir.

2. (a) 15 Puan $[0, 3]$ aralığını n eşit alt aralığa bölerek ve c_k ları bu alt aralıkların sağ uç noktası olarak seçerek $f(x) = x^2$ fonksiyonu için bir Riemann toplamı elde ediniz. Daha sonra $n \rightarrow \infty$ iken bu toplamın limitini alarak $[0, 3]$ aralığında bu eğri altında kalan alanı hesaplayınız.



Solution:

$$[a, b] = [0, 3], \quad \Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_k = x_k = a + \Delta x = 0 + k \frac{3}{n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{3k}{n} \right)^2 \right) \frac{3}{n} \\ &= \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{9(2n^3 + 3n + n)}{2n^3} \end{aligned}$$

$$\text{Alan} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(2n^3 + 3n + n)}{2n^3} = 9$$

- (b) 10 Puan Yerine koyma (değişken dönüşümü) metodunu kullanarak $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta d\theta$ integralini hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^3} du \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) \Big|_1^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} - (1)^{-2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

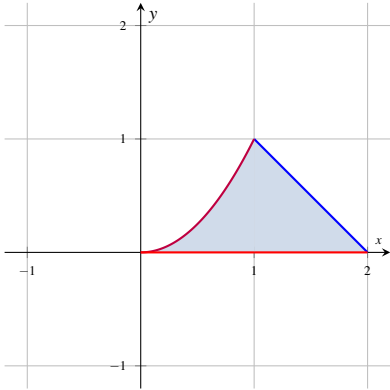
$$g(\theta) = u = \cos 2\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = -2 \sin 2\theta$$

$$g(0) = \cos 0 = 1$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

- (c) 10 Puan Soldan $x + y = 2$, sağdan $y = x^2$ eğrisi ve aşağıdan $y = 0$ doğrusu (x-ekseni) ile sınırlanan üçgensel bölgenin alanını hesaplayınız.



Solution:

$$y = 2 - x \quad \text{and} \quad y = x^2 \quad \text{intersect}$$

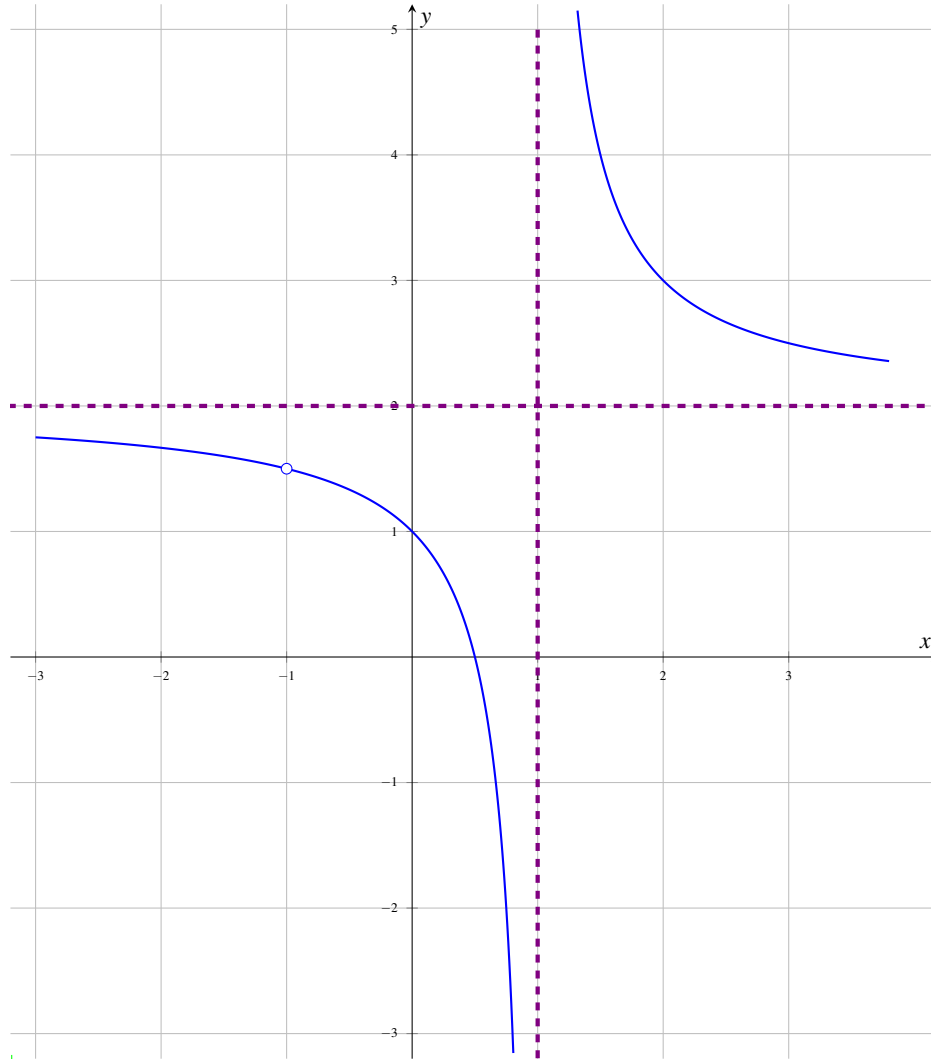
$$y = x^2 = 2 - x \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

3. 25 Puan $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ rasyonel fonksiyonunun grafiğini çiziniz: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ ve $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$.

Solution:



y fonksiyonunu

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

şeklinde yeniden düzenlersek y' 'nin $x = -1$ ve $x = 1$ 'de tanımsız olduğu açıkça görülür. Bunun yanı sıra, $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} = 0$ olduğundan y' , $x = 1$ 'de tanımsızdır. Bu nedenle tek kritik noktada olma adayı $x = 1$ 'dir. Fakat y fonksiyonu $x = 1$ 'de tanımlı olmadığından hiçbir kritik noktası yoktur. Ayrıca y'' de $x = 1$ 'de tanımsızdır. Yine aynı sebeple büküm noktası yoktur.

Şimdi grafiğin asimptotlarını bulalım: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ olduğundan $x =$

1 grafiğin düşey asimptotudur. Dahası, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$ olduğundan $y = 2$ Grafiğin yatay asimptotudur. Eğik asimptot yoktur.

Ayrıca,

- (i) f , $(-\infty, 1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında azalandır,
- (ii) f , $(-\infty, 1)$ aralığında konkav aşağıdır,
- (iii) f , $(1, \infty)$ aralığında konkav yukarıdır, ve
- (iv) Lokal maksimum, minimum yada büküm noktası bulunmamaktadır.

Aşağıdaki tabloda bu bilgiler özetlenmektedir:

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	-	-	-
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$			