



ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ M.Tuba Gülpınar ☒ Sezgin Sezer

İMZA:

| Soru   | Puan | Puanınız |
|--------|------|----------|
| 1      | 15   |          |
| 2      | 35   |          |
| 3      | 20   |          |
| 4      | 30   |          |
| Toplam | 100  |          |

- Sınav süresi 75 dakika.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin,  $\frac{\pi}{3}$  veya  $5\sqrt{3}$ ) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

**Elementer Laplace Dönüşümleri:**  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  mevcut ve  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  olarak alalım.

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$
- $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|$
- $\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
- $\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
- $\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$
- $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
- $f * g = g * f = \int_0^t g(t - \tau)f(\tau)d\tau$

1. 15 puan  $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$  olmak üzere  $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$  diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Solution:**  $y_c(t) = u_1 e^t + u_2 t e^t$

$$\begin{aligned}
 u_1' e^t + u_2' t e^t &= 0 & u_1' + u_2' t &= 0 \\
 u_1' e^t + u_2' e^t + u_2' t e^t &= \frac{e^t}{t^2 + 1} & \Rightarrow u_1' + u_2' + u_2' t &= \frac{1}{t^2 + 1} \\
 u_1' &= -\frac{t}{t^2 + 1} \Rightarrow u_1 = \int -\frac{t}{t^2 + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + c_1 \\
 u_2' &= \frac{1}{t^2 + 1} \Rightarrow u_2 = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t + c_2 \\
 y_c(t) &= -\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) e^t + t e^t \arctan t \\
 y(t) &= c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{e^t \ln(t^2 + 1)}{2} + t e^t \arctan t
 \end{aligned}$$

2. (a) 10 puan  $f(t) = 3e^{-t} + 4t^3 - 2e^{2t} \cos 3t$  fonksiyonunun Laplace Dönüşümünü hesaplayınız.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{3e^{-t} + 4t^3 - 2e^{2t} \cos 3t\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} + 4\mathcal{L}\{t^3\} - 2\mathcal{L}\{e^{2t} \cos 3t\} \\ F(s) &= 3\frac{1}{s+1} + 4\frac{3!}{s^4} - 2\frac{s-2}{(s-2)^2+9} \\ F(s) &= \frac{3}{s+1} + \frac{24}{s^4} - \frac{2s-4}{s^2-4s+13}\end{aligned}$$

- (b) 15 puan  $F(s) = \frac{6s^3 + 13s^2 + 2s + 10}{s(s+2)(s^2+1)}$  ifadesinin ters Laplace Dönüşümünü bulunuz.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\frac{6s^3 + 13s^2 + 2s + 10}{s(s+2)(s^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ 6s^3 + 13s^2 + 2s + 10 &= A(s+2)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + (Cs+D)s(s+2) \\ s=0 &\Rightarrow 10 = 2A \Rightarrow A = 5 \\ s=-2 &\Rightarrow -48 + 52 - 4 + 10 = -10B \Rightarrow B = -1 \\ s=1 &\Rightarrow 6 + 13 + 2 + 10 = 6A + 2B + 3(C+D) \Rightarrow C+D = 1 \\ s=-1 &\Rightarrow -6 + 13 - 2 + 10 = 2A - 2B + C - D \Rightarrow C - D = 3 \Rightarrow C = 2, D = -1 \\ \frac{6s^3 + 13s^2 + 2s + 10}{s(s+2)(s^2+1)} &= \frac{5}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2s-1}{s^2+1} \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^3 + 13s^2 + 2s + 10}{s(s+2)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\} \\ f(t) &= 5 - e^{-2t} + 2\cos t - \sin t\end{aligned}$$

- (c) 10 puan  $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 e^{3\tau} d\tau$  fonksiyonunun Laplace Dönüşümünü bulunuz.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f * g\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \\ t^3 * e^{3t} &= \int_0^t (t-\tau)^3 e^{3\tau} d\tau \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)^3 e^{3\tau} d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{t^3 * e^{3t}\} = \mathcal{L}\{t^3\} \mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{3!}{s^4} \cdot \frac{1}{s-3} = \frac{6}{s^4(s-3)}\end{aligned}$$

3. 20 puan Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace Dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$y'' - 3y' - 18y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 12$$

**Solution:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' - 18y\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ [s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - 3[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 18\mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ [s^2 \mathcal{L}\{y\} - 5s - 12] - 3[s\mathcal{L}\{y\} - 5] - 18\mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ (s^2 - 3s - 18)\mathcal{L}\{y\} &= 5s - 3 \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{5s - 3}{(s - 6)(s + 3)} \\ \frac{5s - 3}{(s - 6)(s + 3)} &= \frac{A}{s - 6} + \frac{B}{s + 3} \\ 5s - 3 &= A(s + 3) + B(s - 6) \\ s = 6 &\Rightarrow 27 = 9A \Rightarrow A = 3 \\ s = -3 &\Rightarrow -18 = -9B \Rightarrow B = 2 \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s - 3}{(s - 6)(s + 3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s - 6} + \frac{2}{s + 3}\right\} \\ y(t) &= 3e^{6t} + 2e^{-3t} \end{aligned}$$

4. 30 puan Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace Dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$y'' + 2y' + y = f(t) \quad , y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad f(t) = \begin{cases} 2 \cos t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}.$$

**Solution:**

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos t - 2u_{\pi}(t) \cos t \\ \mathcal{L}\{y'' + 2y' + y\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ [s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + 2[s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] + \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{2 \cos t - 2u_{\pi}(t) \cos t\} \\ (s^2 + 2s + 1) \mathcal{L}\{y\} &= \frac{2s}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \mathcal{L}\{2 \cos(t + \pi)\} = \frac{2s}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \mathcal{L}\{-2 \cos t\} \\ (s^2 + 2s + 1) \mathcal{L}\{y\} &= \frac{2s}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{2s}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} + e^{-\pi s} \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} \\ \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} &= \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s + 1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \\ 2s &= A(s + 1)(s^2 + 1) + B(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 1)^2 \\ s = -1 &\Rightarrow -2 = 2B \Rightarrow B = -1 \\ s^2 + 2s + 1 &= (s + 1)^2 = A(s + 1)(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 1)^2 \\ s + 1 &= A(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 1) \\ s = -1 &\Rightarrow 0 = 2A \Rightarrow A = 0 \\ s + 1 &= (Cs + D)(s + 1) \Rightarrow 1 = (Cs + D) \Rightarrow C = 0, D = 1 \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = -te^{-t} + \sin t \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} + e^{-\pi s} \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 1)^2} \right\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-\pi s} \left( -\frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right) \right\} \\ y(t) &= -te^{-t} + \sin t + u_{\pi}(t) \left( -(t - \pi)e^{-(t - \pi)} + \sin(t - \pi) \right) \\ y(t) &= -te^{-t} + \sin t + u_{\pi}(t) \left( -(t - \pi)e^{-(t - \pi)} - \sin t \right) \end{aligned}$$