Cep telefonunuzu gözetmene teslim ediniz / Deposit your cell phones to invigilator

Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	25	
3	27	
4	24	
Toplam	100	

1. $g(\theta) = \dfrac{5\cos\theta}{4\theta - 2\pi}$ olsun.

(a) 12 Puan Mevcutsa, $\lim\limits_{\theta\to\pi/2} g(\theta)$ limitini bulunuz.

Solution: The limit leads to the indeterminate $\frac{0}{0}$. Hence using L'Hôpital's Rule, we have

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{5\cos\theta}{4\theta-2\pi} \underset{\text{L'H}}{\overset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{\theta\to 0}\frac{-5\sin\theta}{4} = \frac{-5\sin(\pi/2)}{4} = \boxed{-\frac{5}{4}}$$

p.652, pr.3

(b) 12 Puan $g(\theta)$ fonksiyonunun her noktada sürekli olması için $g(\pi/2)$ ne olmalıdır?

Solution: $g(\theta)$ is continuous at $t = \pi/2$ iff $g(\pi/2) = \lim_{\theta\to\pi/2}$. That is, the value must be $\boxed{g(\pi/2) = -\frac{5}{4}}$.

p.652, pr.3

2. (a) 12 Puan $y = 3\sin(2x)$ ve $x = t^2 + \pi$ ise dy/dt nin $t = 0$ daki değerini bulunuz.

Solution:

$$x = t^2 + \pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2+\pi) = 2t;$$

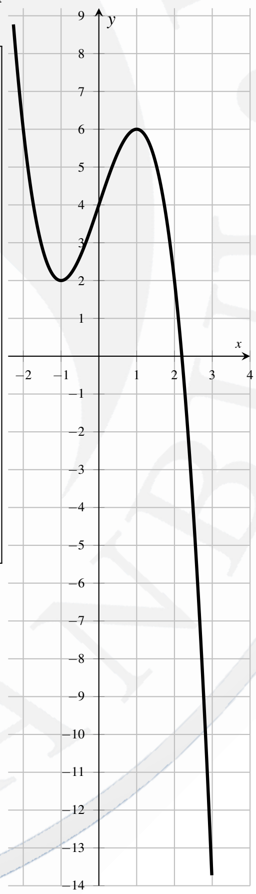
$$y = 3\sin(2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\sin(2x)) = 3\sin(2x)\left[\frac{d}{dx}(2x)\right] = 3\cos(2x) \bullet 2$$

$$= 6\cos(2x) = 6\cos(2(t^2+\pi)) = 6\cos(2t^2+2\pi) = 6\cos(2t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \left[6\cos(2t^2)\right][2t] \Rightarrow \left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = 6\cos(0) \bullet (0) = \boxed{0}.$$

p.192, pr.57

(b) 13 Puan $f(x) = 3x - x^3$ olsun. $f(x) = -4$ denkleminin $[2,3]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.



Solution: Let $g(x) = f(x) + 4 = 3x - x^3 + 4$ where $x \in [2,3]$. Because g is a polynomial, it is continuous everywhere. Moreover,

- $\bullet\, g(2) = 2 > 0$
- $\bullet\, g(3) = -14 < 0$
- $\bullet\, g$ is continuous on$[2,3]$

Hence by the Intermediate Value Theorem,

$$g(x) = 0$$

has a root on [2,3]. Therefore

$$f(x) = -4$$

has a solution in the interval $[2,3]$.

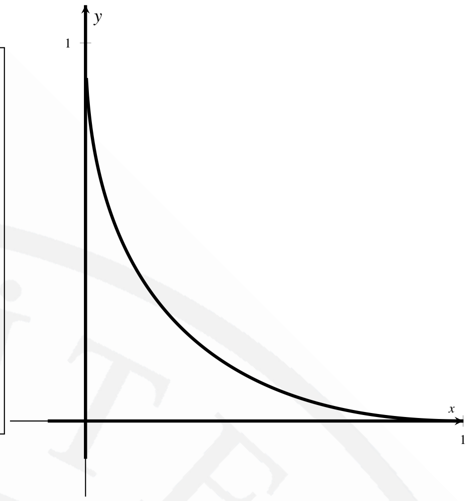
4.4, pr.102

3. (a) 13 Puan $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ eğrisinin birinci dörtte bir bölgede oluşturduğu bölgenin toplam alanını bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a (a^{1/2}-x^{1/2})^2\,dx = \int_0^a (a-2\sqrt{a}x^{1/2}+x)\,dx \\ &= \left[ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}x^{3/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^a \\ &= aa - \frac{4}{3}\sqrt{a}a\sqrt{a} + \frac{a^2}{2} \\ &= a^2\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{6}(6-8+3) = \frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

p.879, pr.42



(b) 14 Puan $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 12\cos^2(4x)\sin(4x)\,dx$ ç integralini bulunuz.

Solution: Let $u=\cos(4x)$. Then $du=-4\sin(4x)\ dx$. When $x=\pm\pi/3$, we have $u=\cos(\pm 4\pi/3)=-1/2$. Hence

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 12\cos^2(4x)\sin(4x)\,dx &= -3\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \underbrace{(\cos(4x))^2}_{u^2}(-4\sin(4x))\ dx_{du} \\ &= -3\int_{-1/2}^{-1/2} u^2\,du = \boxed{0} \end{aligned}$$

p.112, pr.26

4. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $\displaystyle\int_1^8 \frac{\log_4 \theta}{\theta}\,d\theta$ integralini bulunuz.

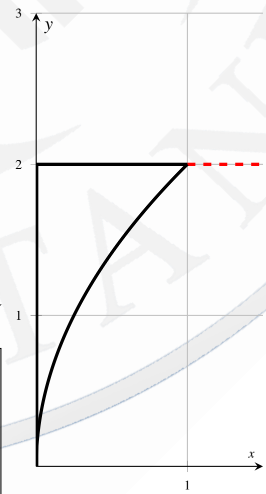
Solution: First notice that

$$\frac{\log_4 \theta}{\theta} = \frac{\frac{\ln\theta}{\ln 4}}{\theta} = \frac{\ln\theta}{\theta\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}\frac{\ln\theta}{\theta}.$$

Now let $u = \ln\theta$. Then $du = \dfrac{1}{\theta}\,d\theta$. When $\theta = 1$, we have $u = \ln 1 = 0$ and when $\theta = 8$, we have $u = \ln 8 = 3\ln 2$. Therefore

$$\int_1^8 \frac{\log_4\theta}{\theta}\,d\theta = \int_1^8 \frac{\ln\theta}{\ln 4}\frac{1}{\theta}\,d\theta = \frac{1}{\ln 4}\int_1^8 \ln\theta\frac{1}{\theta}\,d\theta = \frac{1}{\ln 4}\int_0^{\ln 8} u\,du$$
$$= \frac{1}{\ln 4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln 8} = \frac{1}{2\ln 4}(3\ln 2)^2 = \frac{9\ln 2\cancel{\ln 2}}{4\cancel{\ln 2}} = \boxed{\frac{9}{4}\ln 2}$$

p.241, pr.45



(b) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Solution: If we use the method of washers, the inner radius is $r(x) = 2\sqrt{x}$ and the outer radius is $R(x) = 2$. Hence the volume of revolution is

$$V = \int_0^1 \pi\{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}\,dx = \pi\int_0^1 \{(2)^2 - (2\sqrt{x})^2\}\,dx$$
$$= \pi\int_0^1 \{4 - 4x\}\,dx = \pi\left[4x - 2x^2\right]_0^1$$
$$= 4\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{2\pi}$$

p.212, pr.85