



Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta “gidiş yolu” belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz.**
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	28	
3	27	
4	21	
Toplam	100	

1. (a) **12 Puan** $\int \frac{1}{v \ln v} dv$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \ln v$ olsun. O zaman $du = \frac{1}{v} dv$ olur. Bu durumda istenen integrali de

$$\int \frac{1}{v \ln v} dv = \int \frac{1}{\ln v} \frac{1}{v} dv = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln v| + c$$

olarak buluruz.

p.652, pr.3

- (b) **12 Puan** Mevcutsa, L'Hôpital kuralı kullanarak $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^3 - 17x^2 + 13x - 3}{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}$ limitini bulunuz.

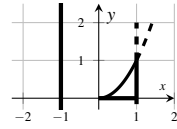
Çözüm: İki kere L'Hôpital kuralı kullanarak

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^3 - 17x^2 + 13x - 3}{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{21x^2 - 34x + 13}{9x^2 - 14x + 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{42x - 34}{18x - 14} = \frac{42 - 34}{18 - 14} = \frac{8}{4} = 2$$

buluruz.

p.94, pr.33

2. (a) 14 Puan $y = x^2$, $y = 0$ ve $x = 1$ ile sınırlı bölgenin $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



Çözüm: Kabuk yöntemi kullanalım. $a = 0$,
 $b = 1$;

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yarıçapı} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yüksekliği} \end{array} \right) dx \\ &= \int_0^1 2\pi x^2 [x - (-1)] dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^3 + x^2) dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{7}{12} \right) = \boxed{\frac{7\pi}{6}} \end{aligned}$$

p.94, pr.10

- (b) 14 Puan $y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$ olduğuna göre Logaritmik Türev kullanarak, $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm: Logaritma alarak başlayıp, sonra türev alacağız.

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} = \ln \left(\frac{x(x-2)}{x^2+1} \right)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x(x-2)}{x^2+1} \right) = \frac{1}{3} (\ln x(x-2) - \ln(x^2+1)) \\ &= \frac{1}{3} (\ln x + \ln(x-2) - \ln(x^2+1)) \\ \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \right)} \end{aligned}$$

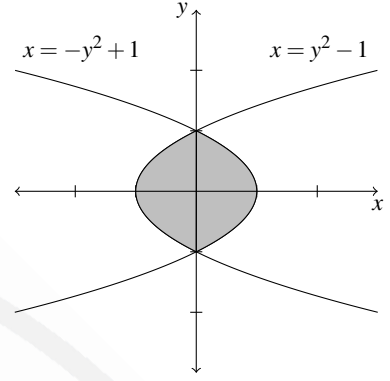
p.94, pr.10

3. (a) 13 Puan Şekildeki taralı alanı bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{TARALI ALAN} &= \int_{-1}^1 \left((-y^2 + 1) - (y^2 - 1) \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 (-2y^2 + 2) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3}y^3 + 2y \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3} + 2 - \left(-\frac{2}{3} - 2 \right) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

p.94, pr.10



- (b) 14 Puan Şekildeki pencerenin toplam çevresi P birim olup dikdörtgen kısmına düz cam takılmıştır. Yarım daire kısmın camı da renklidir. Renkli camın birim alanda ışık geçirgenliği düz camın yarısıdır. *En fazla ışık geçirecek şekilde pencerenin oranlarını bulunuz.*

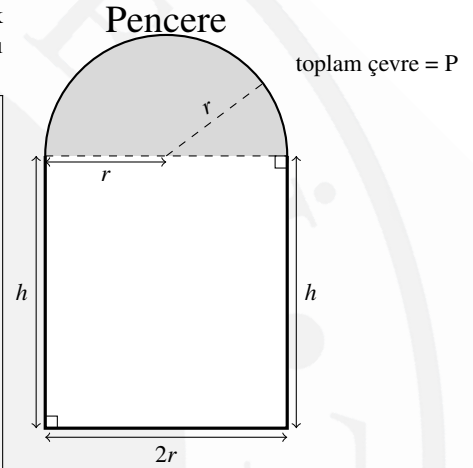
Çözüm: Şekilden, r yarıçapı göstermek üzere, $P = 2r + 2h + \pi r$ oluyor. İletilen ışık miktarının orantılı olduğu sayı

$$A = 2rh + \frac{1}{4}\pi r^2 = r(P - 2r - \pi r) + \frac{1}{4}\pi r^2 = rP - 2r^2 - \frac{3}{4}\pi r^2. \text{ O zaman}$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= P - 4r - \frac{3}{2}\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{2P}{8 + 3\pi} \\ \Rightarrow 2h &= P - \frac{4P}{8 + 3\pi} - \frac{2\pi P}{8 + 3\pi} = \frac{(4 + \pi)P}{8 + 3\pi} \\ \Rightarrow \frac{2r}{h} &= \frac{8}{4 + \pi} \end{aligned}$$

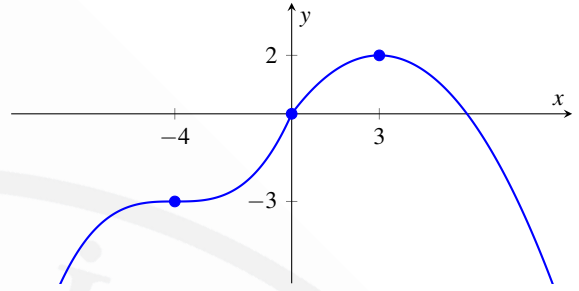
sayısı en fazla ışığı yansıtan oranı verir, çünkü $\frac{d^2A}{dr^2} = -4 - \frac{3}{2}\pi < 0$

p.94, pr.10



4. (a) 11 Puan İki kere-türevli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun verilen özelliklerini kullanarak grafiğini çiziniz. Bütün önemli noktaları belirtiniz.

x	y	Türevler	
$x < -4$		$y' > 0$,	$y'' < 0$
-4	-3	$y' = 0$,	$y'' = 0$
$-4 < x < 0$		$y' > 0$,	$y'' > 0$
0	0	$y' > 0$,	$y'' = 0$
$0 < x < 3$		$y' > 0$,	$y'' < 0$
3	2	$y' = 0$,	$y'' < 0$
$x > 3$		$y' < 0$,	$y'' < 0$



- (b) 10 Puan $f(x) = x^2 - 4x - 5$ fonksiyonunun $x > 2$ için tersi $f^{-1}(x)$ ise, $\frac{df^{-1}}{dx}$ in $x = 0 = f(5)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm: Ters Fonksiyon Teoremi'nden

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = 2x - 4 &= \left[\frac{df^{-1}}{dx} \right]_{x=f(5)} = \frac{1}{\left[\frac{df}{dx} \right]_{x=5}} \\ \Rightarrow \left[\frac{df^{-1}}{dx} \right]_{x=f(5)} &= \frac{1}{(2x-4)_{x=5}} = \frac{1}{10-4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

olarak buluruz.