



Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta “gidiş yolu” belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz.**
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 90 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	25	
3	27	
4	24	
Toplam	100	

1. (a) **12 Puan** Mevcutsa, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{e^x - 1}$ limitini bulunuz.

Solution: The limit leads to the indeterminate $\frac{0}{0}$. Hence using L'Hôpital's Rule, we have

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'H}}{\lim_{x \rightarrow 0}}} \frac{2^{\sin x} \cos x (\ln 2)}{e^x} = \frac{2^{\sin 0} \cos 0 (\ln 2)}{e^0} = \frac{2^0 (1) (\ln 2)}{1} = \boxed{\ln 2}$$

p.652, pr.3

- (b) **12 Puan** $\int_0^{\ln 9} e^\theta (e^\theta - 1)^{1/2} d\theta$ belirli integralini bulunuz.

Solution: Let $u = e^\theta - 1$. Then $du = e^\theta d\theta$. When $\theta = 0$, we have $u = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ and when $\theta = \ln 9$, we have $u = e^{\ln 9} - 1 = 9 - 1 = 8$. Hence

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 9} e^\theta (e^\theta - 1)^{1/2} d\theta &= \int_0^{\ln 9} \underbrace{(e^\theta - 1)^{1/2}}_{u^{1/2}} \underbrace{e^\theta d\theta}_{du} \\ &= \int_0^8 u^{1/2} du = \left[\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} \right]_0^8 = \frac{2}{3} (8^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{2}{3} (2^{9/2} - 0) = \frac{2^{11/2}}{3} = \boxed{\frac{32\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$

p.652, pr.3

2. (a) **12 Puan** $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$ ise $\frac{df^{-1}}{dx}$ türevinin $x = 6 = f(1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Solution:

$$\frac{df}{dx} = 6x^2 + 3 \Rightarrow \left[\frac{df^{-1}}{dx} \right]_{x=6} = \left[\frac{1}{\frac{df}{dx}} \right]_{x=1} = \left[\frac{1}{6x^2 + 3} \right]_{x=1} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

p.83, pr.40

- (b) 13 Puan $x = \sqrt{y}$, $2 \leq y \leq 6$ eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Solution: The surface area formula we shall use is

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy$$

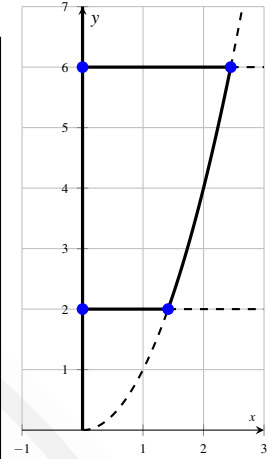
$$x = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{4y} \Rightarrow S = \int_2^6 2\pi(\sqrt{y}) \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$$

$$S = 2\pi \int_2^6 \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}} dy = \pi \int_2^6 \sqrt{4y+1} dy \quad \boxed{u = 4y+1, \quad du = 4 dy \Rightarrow}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_9^{25} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_9^{25} = \frac{\pi}{6} \left[(25)^{3/2} - (9)^{3/2} \right] = \frac{\pi}{6} [125 - 27]$$

$$\rightarrow S = \boxed{\frac{49\pi}{3}}$$

4.4, pr.102



3. (a) 13 Puan $y = \frac{4}{x^3}$ ve $x = 1$, $y = 1/2$ doğruları ile sınırlı bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Solution:

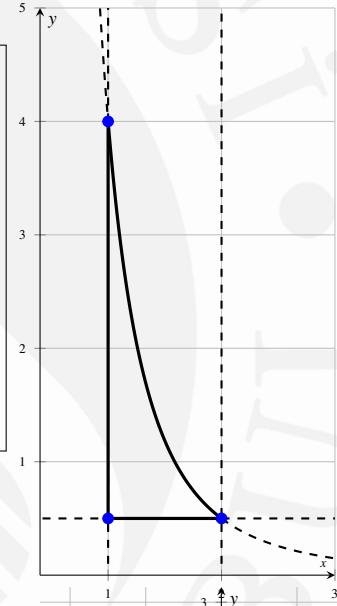
$$V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{shell} \\ \text{radius} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{shell} \\ \text{height} \end{array} \right) dx$$

$$= \int_1^2 2\pi(2-x) \left(\frac{4}{x^3} - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} - 1 + \frac{x}{2} \right) dx = 2\pi \left[-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} - x + \frac{x^2}{4} \right]_1^2$$

$$= 2\pi \left((-1 + 2 - 2 + 1) - (-4 + 4 - 1 + \frac{1}{4}) \right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

p.879, pr.42



- (b) 14 Puan varsayalım ki

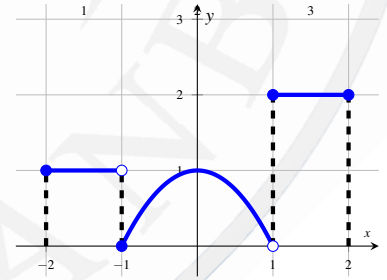
$$u(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Grafiğini çiziniz ve $\int_{-2}^2 u(x) dx$ integralini bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 u(x) dx &= \int_{-2}^{-1} dx + \int_{-1}^1 (1-x^2) dx + \int_1^2 2 dx \\ &= [x]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 + [2x]_1^2 = (-1 - (-2)) + \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) \right] \\ &\quad + [2(2) - 2(1)] = 1 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 2 \right) = \boxed{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

p.112, pr.26



4. (a) 12 Puan Aşağıdaki özelliklere sahip bir f fonksiyonu grafiğini çiziniz.

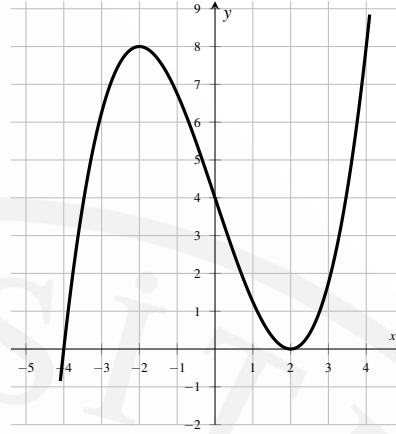
$$\begin{cases} f \text{ her yerde sürekli} \\ f(-2) = 8, & f'(2) = f'(-2) = 0, \\ f(0) = 4, & |x| < 2 \text{ için } f'(x) < 0 \\ f(2) = 0, & x < 0 \text{ için } f''(x) < 0 \\ |x| > 2 \text{ için } f'(x) > 0 & x > 0 \text{ için } f''(x) > 0, \end{cases}$$

Solution: One such example is

$$f(x) = x^3/4 - 3x + 4.$$

It is easy to check that this function fulfills all requirements.

p.241, pr.45



- (b) 12 Puan Varsayalım ki $y = f(x)$ 'in türevi $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$ olsun. Varsa, hangi noktalarda, f 'nin grafiği yerel maksimum, yerel minimum veya büküm noktasına sahiptir?

Solution: When $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$, then

$$\begin{aligned} y'' &= 2(x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)^2(x-4) + (x-1)^2(x-2) \\ &= (x-1) \left[2(x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 5x + 4) + (x^2 - 3x + 2) \right] \\ &= 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11). \end{aligned}$$

The curve rises on $(-\infty, 2)$ and $(4, \infty)$ and falls on $(2, 4)$. At $x = 2$, there is a local maximum and at $x = 4$ a local minimum. The curve is concave downward on $(-\infty, 1)$ and $\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$ and concave upward on $\left(1, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$ and $\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$. At $x = 1, x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}, x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ there are inflection points.

p.212, pr.85

