Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	28	
3	27	
4	21	
Toplam	100	

1. (a) 12 Puan $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\,\mathrm{d}x$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \ln x$ olsun. O zaman $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ olur. Bu durumda istenen integrali de

$$\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^{-3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int u^{-3}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + c = \boxed{\frac{(\ln x)^{-2}}{-2} + c}$$

olarak buluruz.

p.652, pr.3

(b) 12 Puan Varsa, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$ limitini bulunuz.

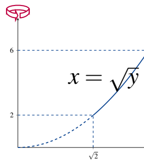
Çözüm: İlk olarak $y = (1+\sin x)^{1/x}$ olsun. O vakit $\ln y = \ln(1+\sin x)^{1/x} = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$ olur. Buradan

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = 1$$

Böylece $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = \mathrm{e}^1 = \boxed{\mathrm{e}}$

p.94, pr.33

2. (a) $\boxed{\text{14 Puan}}$ $x = \sqrt{y}$ eğrisinin $2 \le y \le 6$ aralığındaki parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.



Çözüm: Kullanacağımız formül: $S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,\mathrm{d}y$

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{4y} \Rightarrow S = \int_2^6 2\pi(\sqrt{y})\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\,dy$$

$$S = \cancel{2}\pi \int_2^6 \cancel{\sqrt{y}}\ \frac{\sqrt{4y+1}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{y}}}\,dy = \pi \int_2^6 \sqrt{4y+1}\,\mathrm{d}y \qquad \boxed{u = 4y+1, \qquad du = 4\,dy \Rightarrow}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_9^{25} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{4}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_9^{25} = \frac{\pi}{6}\left[(25)^{3/2} - (9)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}[125 - 27]$$

$$\longrightarrow S = \boxed{\frac{49\pi}{3}}$$

p.377, pr.24

(b) $\boxed{\text{14 Puan}}$ $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t+1)}}$ olduğuna göre Logaritmik Türev kullanarak, $\dfrac{dy}{dt}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\ln y = \ln\sqrt{\frac{1}{t(t+1)}} = \ln\left(\frac{1}{t(t+1)}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t(t+1)}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1) - \ln t(t+1)) = \frac{1}{2}(0 - \ln t - \ln(t+1))$$

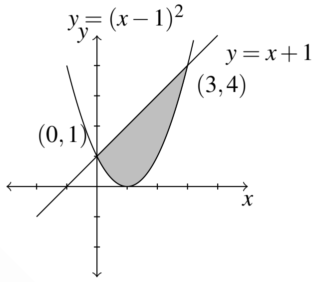
$$= -\frac{1}{2}(\ln t + \ln(t+1))$$

$$\frac{d}{dy}(\ln y) = \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}(\ln t + \ln(t+1))\right] \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right)$$

p.94, pr.10

3. (a) 13 Puan Şekildeki taralı alanı bulunuz.



Çözüm:

$$\begin{aligned}
\text{TARALI ALAN} &= \int_0^3 \Big((x+1)-(x-1)^2\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big(-x^2+3x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3 \\
&= -\frac{1}{3}(3)^3+\frac{3}{2}(3)^2 = -9+\frac{27}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

p.94, pr.10

(b) 14 Puan $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x-3\sin(3x)}{5x^3} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli ise, c değeri ne olmalıdır?

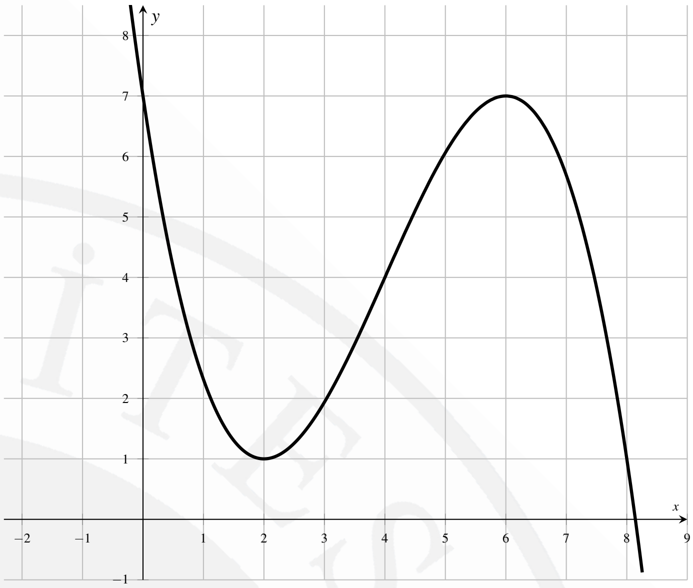
Çözüm: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli ise, o zaman

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow c = f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{9x-3\sin(3x)}{5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{9-9\cos(3x)}{15x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{27\sin(3x)}{30x} = \lim_{x\to 0}\frac{81\cos(3x)}{30} = \boxed{\frac{27}{10}}$$

p.112, pr.26

4. (a) $\boxed{\text{11 Puan}}$ İki kere-türevli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun verilen özelliklerini kullanarak grafiğini çiziniz. Bütün önemli noktaları belirtiniz.

x	y	**Türevler**	
$x < 2$		$y' < 0,$	$y'' > 0$
2	1	$y' = 0,$	$y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,$	$y'' > 0$
4	4	$y' > 0,$	$y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,$	$y'' < 0$
6	7	$y' = 0,$	$y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,$	$y'' < 0$



(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ ise, $\dfrac{df^{-1}}{dx}$ in $f(\ln 2)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm: Ters Fonksiyon Teoremi'nden

$$\frac{df}{dx} = \mathrm{e}^x + 1 = \left[\frac{df^{-1}}{dx}\right]_{x=f(\ln 2)} = \frac{1}{\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=\ln 2}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{df^{-1}}{dx}\right]_{x=f(\ln 2)} = \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)_{x=\ln 2}} = \frac{1}{2+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

olarak buluruz.