Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 75 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	22	
2	25	
3	27	
4	26	
Toplam	100	

1. (a) 10 Puan Mevcutsa $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$ limitini bulunuz (**L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir**).

Solution: Making the substitution $t = x^2-4$ and noting that $t\to 0$ as $x\to 2$, we have $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = 1$. Therefore

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}(x+2)\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}\lim_{x\to 2}(x+2)\\ &= (1)(2+2) = \boxed{4}\end{aligned}$$

p.652, pr.3

(b) 12 Puan $f(x)=\sqrt{4-x}$, $x_0=0$, $L=2$ olsun. $0<|x-x_0|<\delta$ i sağlayan her x için $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ bulunuz.

Solution: First, we want:

$$\begin{aligned}|\sqrt{4-x}-2|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\sqrt{4-x}-2<\varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon<\sqrt{4-x}<2+\varepsilon\\ \Rightarrow (2-\varepsilon)^2<4-x<(2+\varepsilon)^2\\ \Rightarrow -(2+\varepsilon)^2<x-4<-(2-\varepsilon)^2 \Rightarrow 4-(2+\varepsilon)^2<x<4-(2-\varepsilon)^2\end{aligned}$$

Moreover

$$|x-0|<\delta \Rightarrow -\delta<x<\delta.$$

Then $-\delta = 4-(2+\varepsilon)^2 = \cancel{4}-\cancel{4}-4\varepsilon-\varepsilon^2 = -4\varepsilon-\varepsilon^2 \Rightarrow \delta = 4\varepsilon+\varepsilon^2$ or $\delta = 4-(2-\varepsilon)^2 = 4\varepsilon-\varepsilon^2$; thus, we choose the smaller distance $\delta = \min\{4\varepsilon+\varepsilon^2, 4\varepsilon-\varepsilon^2\} = \boxed{4\varepsilon-\varepsilon^2}$.

p.573, pr.18

2. (a) $\boxed{\text{15 Puan}}$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \le 0 \\ x^2+3a-b & 0 < x \le 2 \\ 3x-5, & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonu a ve b nin hangi değer(ler)i için her noktada süreklidir.

Solution: Since each piece is a polynomial and polynomials are continuous everywhere, f is clearly continuous if $x \notin \{0,2\}$. For continuity at $x=0$, we require that the one-sided limits of $f(x)$ at $x=0$ be equal. But $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b) = b$ and $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3a-b) = 3a-b$.
Similarly, for continuity at $x=2$, we require that the one-sided limits of $f(x)$ at $x=2$ be equal. But $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+3a-b) = 4+3a-b$ and $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3x-5) = 6-5 = 1$.
Equality of one-sided limits is equivalent to

$$b = 3a-b \text{ and } 4+3a-b = 1$$
$$\Rightarrow a = -2 \text{ and } b = -3.$$

p.83, pr.40

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ fonksiyonunun $x=3$'de *sürekli bir fonksiyona genişlemesi için* $g(3)$'ü bulunuz.

Solution:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{1} = 3+3 = 6$$

Hence we define $g(3)=6$ and get the unique extension $\tilde{g}$.

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

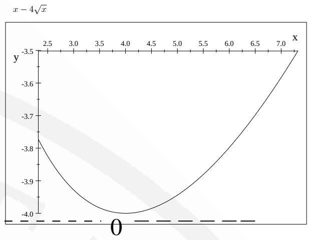
p.695, pr.37

3. (a) 13 Puan $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ 'in tüm (mutlak ve yerel) ekstrem değerlerini bulunuz.

Solution: First the domain of f is $[0, +\infty)$. Note that

$$y' = 1 - \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}},$$

which is zero at $x = 4$ and is undefined when $x = 0$. If $x \in (0,4)$, we have $y' < 0$ and if $x \in (4, +\infty)$, we have $y' > 0$. Hence there is a *local minimum* at $x = 4$. Now for the absolute extrema, we compare the values of f at 0 and 4 respectively. Hence $f(0) = 0 - 4\sqrt{0} = 0$ is the *local maximum* and $f(4) = 4 - 4\sqrt{4} = \boxed{-4}$ is the *absolute minimum*.



sign of y': – – – – – – 0 + + + + + + + + + + + + + – – – – – – – 0 – – – – – –

0 0 4 $+\infty$ x

graph of y: concave down concave up concave down

1

p.879, pr.42

(b) 14 Puan $f'(x) = \lim\limits_{z\to x} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ formülünü kullanarak $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ 'in *türevini* bulunuz.

Solution: Here $f(z) = g(z) = \dfrac{1}{z+2}$ and $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ and so

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{g(z)-g(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{\frac{1}{z+2}-\frac{1}{x+2}}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{\frac{x+2-(z+2)}{(x+2)(z+2)}}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x}\frac{x-z}{(z-x)(x+2)(z+2)} = \lim_{z\to x}\frac{-\cancel{(z-x)}}{\cancel{(z-x)}(x+2)(z+2)} = \frac{-1}{(x+2)(x+2)} = \boxed{-\frac{1}{(x+2)^2}}$$

p.112, pr.26

4. (a) 15 Puan $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$ eğrisine $P_0(-1, 0)$ noktasında **(a)** *teğet* olan **(b)** *normal* olan doğrunun denklemini bulunuz.

Solution: Using implicit differenttiation, we have

$$6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0 \Rightarrow 12x + 3y + 3xy' + 4yy' + 17y' = 0$$
$$\Rightarrow y'(3x + 4y + 17) = -12x - 3y$$
$$\Rightarrow y' = \frac{-12x-3y}{3x+4y+17}$$
$$\Rightarrow \text{slope of tangent} = \left.\frac{-12x-3y}{3x+4y+17}\right|_{x=-1} = \frac{(-12)(-1)-(3)(0)}{(3)(-1)+(4)(0)+17} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

(a) An equation for the tangent line is $y - 0 = \dfrac{6}{7}(x+1) \Rightarrow \boxed{6x - 7y = -6}$

(b) An equation for the normal line is $y - 0 = -\dfrac{7}{6}(x+1) \Rightarrow \boxed{7x + 6y = -7}$

p.695, pr.37

(b) 11 Puan $y = \left(3+\cos^3(3x)\right)^{-1/3}$ ise dy/dx'i bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(3+\cos^3(3x)\right)^{-1/3}\right] &= -\frac{1}{3}\left(3+\cos^3(3x)\right)^{-4/3}\frac{d}{dx}\left(3+\cos^3(3x)\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(3+\cos^3(3x)\right)^{-4/3}\left(0+3\cos^2(3x)\frac{d}{dx}(\cos(3x))\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(3+\cos^3(3x)\right)^{-4/3} 3\cos^2(3x)(-3\sin(3x)) \\
&= \boxed{3\left(3+\cos^3(3x)\right)^{-4/3}\cos^2(3x)\sin(3x)}
\end{aligned}$$

p.452, pr.24