



Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta “gidiş yolu” belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz.**
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 75 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	26	
2	27	
3	25	
4	22	
Toplam	100	

1. (a) **15 Puan** $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ eğrisine $P_0(1, 1)$ noktasında *normal* olan doğru, eğriyi başka hangi noktada keser? Bulunuz.

Çözüm: Türev olarak başlayalım.

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow 2x + 2xy' + 2y - 6yy' = 0 \Rightarrow y'(2x - 6y) = -2x - 2y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{3y-x}$$

olduğundan $P_0(1, 1)$ noktasındaki teğetin eğimi

$$y'|_{(1,1)} = \frac{x+y}{3y-x} \Big|_{(1,1)} = 1$$

olur. Buradan aynı noktadaki normalin denklemi de $y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$ olur. Bu normalin eğriyi kestiği diğer noktayı bulmak için, normal denklemini eğri denkleminde koyarız.

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x(-x + 2) - 3(-x + 2)^2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 16x - 12 = 0 \Rightarrow -4(x - 1)(x - 3) = 0$$

Kökler 1 ve 3 olur. $x = 3$ olduğunda, $y = -x + 2 \Rightarrow y = -3 + 2 = -1$ olur ve normal olan doğrunun eğriyi diğer kestiği nokta $(3, -1)$ olur. Aşlında iki nokta var, diğeri de verilen $(1, 1)$ dir.

p.695, pr.37

- (b) **11 Puan** $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$ ise dy/dt türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3 = 3 \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2 \frac{d}{dt} \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right) \\ &= 3 \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2 \left(0 + 4 \tan^3\left(\frac{t}{12}\right) \frac{d}{dt} \left(\tan\left(\frac{t}{12}\right)\right)\right) \\ &= 3 \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2 4 \tan^3\left(\frac{t}{12}\right) \sec^2\left(\frac{t}{12}\right) \left(\frac{1}{12}\right) \\ &= \boxed{\left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2 \tan^3\left(\frac{t}{12}\right) \sec^2\left(\frac{t}{12}\right)} \end{aligned}$$

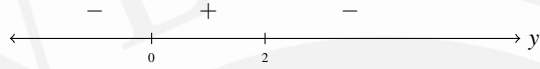
p.452, pr.24

2. (a) **13 Puan** $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$ eğrisinin grafiğini çiziniz. Dönüm ve büküm noktalarını belirtiniz.

Çözüm: Tanım kümesi $(-\infty, \infty)$. Öte yandan

$y(-x) = -2(-x)^3 + 6(-x)^2 - 3 = 2x^3 + 6x^2 - 3$. Bu ifade ne $y(x)$ ne de $-y(x)$ her x için eşit olamaz. Yani grafik ne y -eksenine göre ne de orijine göre simetriktir. Grafiğin simetrisi yoktur.

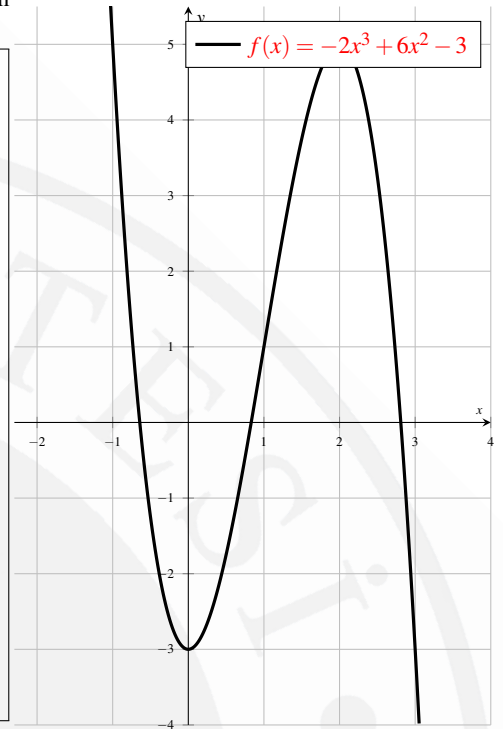
Birinci türev $y' = -6x^2 + 12x = 6x(-x + 2)$. Kritik noktalar $x = 0$ ve $x = 2$ ir. Bu da bizi $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarına getirir. Şimdi $(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ boyunca grafik azalan ve $(0, 2)$ boyunca artan. Ayrıca, $(0, -3)$ noktası bir yerel minimum ve $(2, 5)$ noktası da bir yerel maksimumdur.



İkinci türev $y'' = -12x + 12$ olup sıfır olduğu yer $x = 1$ olduğu noktadır. Buradan iki tane alt-aralık buluruz: $(-\infty, 1)$ ve $(1, \infty)$. Şimdi $(-\infty, 1)$ üzerinde pozitif ve $(1, \infty)$ üzerinde, y'' negatif olduğundan, grafik $(-\infty, 1)$ üzerinde yukarıya konkav ve $(1, \infty)$ üzerinde de aşağıya konkav olur. Dahası $(1, 1)$ noktası da bir büküm noktası olur.



p.94, pr.10



- (b) **14 Puan** $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ formülünü kullanarak $g(x) = \frac{x}{x-1}$ 'in türevini bulunuz.

Çözüm: Burada $f(z) = g(z) = \frac{z}{z-1}$ ve $f(x) = g(x) = \frac{x}{x-1}$ böylece

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{g(z) - g(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\frac{z}{z-1} - \frac{x}{x-1}}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\frac{z(x-1) - x(z-1)}{(z-1)(x-1)}}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{-z + x}{(z-x)(x-1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{-(z-x)}{(z-x)(z-1)(x-1)} = \frac{-1}{(z-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

p.112, pr.26

3. (a) **15 Puan**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x < -1 \\ c & x = -1 \\ b \cos(\pi x), & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonu c ve b nin hangi değer(ler)i için her noktada süreklidir.

Çözüm: Limitleri hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+3) = 2 \text{ ve} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (b \cos(\pi x)) = b \cos(-\pi) = -b. \end{aligned}$$

Süreklilik için sağdan ve soldan limitler eşit olmalı. Yani

$$2 = -b \Rightarrow b = -2 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow c = 2.$$

p.83, pr.40

- (b) **10 Puan** Yüksekliği 30 m., yarıçapı 6 m. ve kalınlığı 0.5 m. olan silindirik şeklindeki bir malzemenin hacmini tahmin edin.

Çözüm: Yarıçapı r , yüksekliği h olan silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ dir. Eğer h sabit tutulursa,

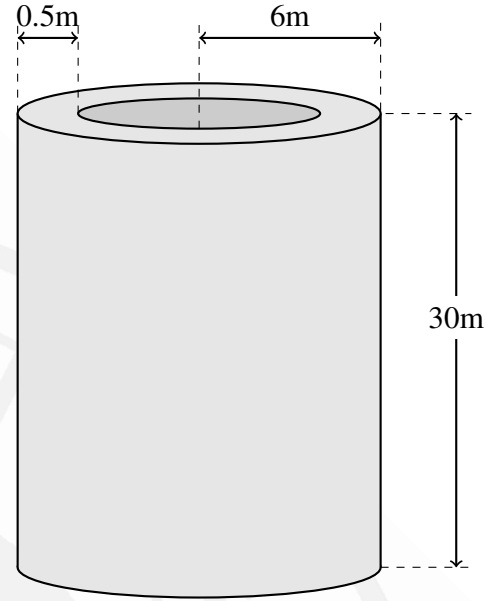
$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h.$$

Böylece $dV = 2\pi r h dr$ olur. Şimdi $h = 30$ m. ve $dr = 0.5$ m. olduğunda, bu silindirik kabuk için kullanılan malzemenin hacmi yaklaşık olarak

$$dV = 2\pi r h dr = 2\pi(6)(30)(0.5) = 1802\pi \approx 5655.5 \text{ m}^3$$

olarak bulunur.

p.94, pr.10



4. (a) **10 Puan** Mevcutsa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x}$ limitini bulunuz (**L'Hôpital kuralı kabul edilmeyecektir**).

Çözüm: $t = 2x$ dersek ve $x \rightarrow 0$ iken $t \rightarrow 0$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x) + \cos^2(2x) - (\cos^2(2x) - \sin^2(2x))}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(2x)}{3x} = \left(\frac{8}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x) \right) \\ &= \left(\frac{8}{3} \right) (1)(0) = \boxed{0} \end{aligned}$$

p.652, pr.3

- (b) **12 Puan** $\lim_{x \rightarrow 23} \sqrt{x-7} = 4$ olduğunu $\varepsilon = 1$ için doğrulayan bir $\delta > 0$ bulunuz.

Çözüm: Eşitsizlikleri yeniden yazarsak,

$$\left| \sqrt{x-7} - 4 \right| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x-7} - 4 < 1 \Rightarrow 3 < \sqrt{x-7} < 5 \Rightarrow 9 < x-7 < 25 \Rightarrow 16 < x < 32$$

bulunur ve

$$|x - 23| < \delta \Rightarrow -\delta < x - 23 < \delta \Rightarrow -\delta + 23 < x < \delta + 23.$$

olur. Bu durumda

$$-\delta + 23 = 16 \Rightarrow \delta = 7, \text{ or } \delta + 23 = 32 \Rightarrow \delta = 9; \text{ or } \delta = \min\{7, 9\} = 7.$$

p.94, pr.33