Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

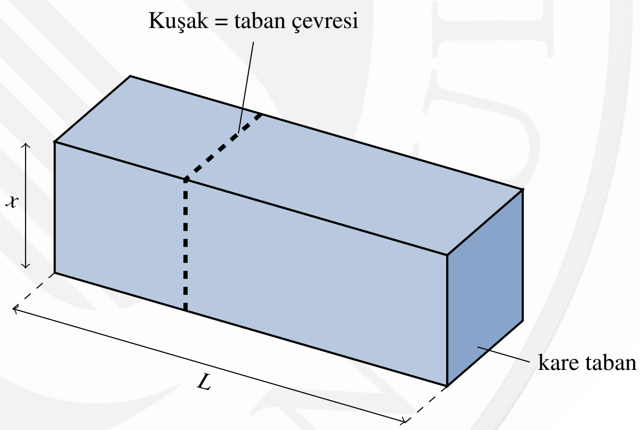
Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	22	
2	25	
3	27	
4	26	
Toplam	100	

1. (a) 12 Puan Bir posta şirketi taban çevresi ve uzunluğunun toplamı 276 cm'yi aşmayan kutuları yurtiçi taşıma için kabul etmektedir. Tabanı bir kare olan kutunun maksimum hacimli olması için boyutları ne olmalıdır?



Solution: We have $4x + L = 276$ and $V = x^2 L$.

The volume of the box is $V(x) = x^2(276 - 4x)$ where $0 \le x \le 69$. Then

$$V'(x) = 552x - 12x^2 = 12x(46 - x) = 0.$$

Critical points are 0 and 46, but $x = 0$ results in box.

Since $V''(x) = 552 - 24x < 0$ at $x = 46$, by second derivative test, we have a maximum.

The dimensions are $46 \times 46 \times 92$.

p.652, pr.3

(b) 10 Puan $y = \displaystyle\int_{\cos x}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Solution: First, notice that $y = \displaystyle\int_{\cos x}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = -\int_{2}^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$. Then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\int_{2}^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt\right)$$

Now let $u = \cos x$. Then $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$. By the Chain Rule, we have

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_{2}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = -\frac{d}{du}\left(\int_{2}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt\right)\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^3}}(-\sin x) = -\frac{1}{\sqrt{1+(\cos x)^3}}(-\sin x) = \boxed{\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^3 x}}}$$

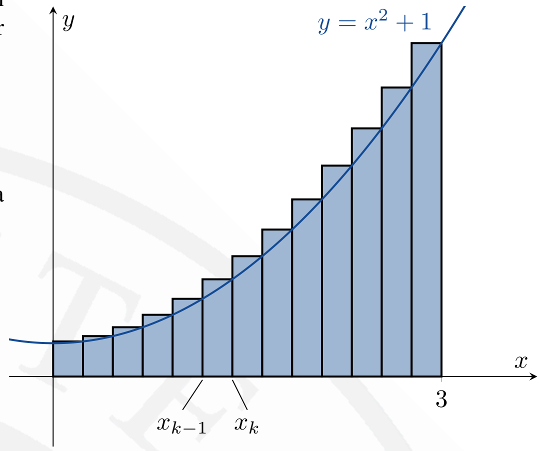
p.573, pr.18

2. (a) 15 Puan $f(x) = x^2 + 1$'in altında $[0,3]$ aralığının üstünde kalan bölgenin alanını şöyle bulunuz. Önce $[0,3]$'ü n eşit alt-aralığa bölünüz ve her k için, $c_k = x_k$ (yani $[x_{k-1}, x_k]$'nin sağ uç noktası) alarak

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x$$

Riemann toplamı için n cinsinden bir formül bulunuz. Daha sonra $\lim_{n\to\infty} S_n$ limitini bulunuz.

Yol Gösterme: Şunu kullanabilirsiniz. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



Solution: Let $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ and $c_k = k\Delta x = \frac{3k}{n}$. The right-hand sum is

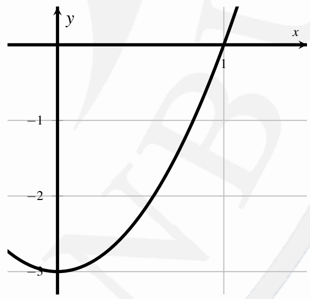
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n}\left(c_k^2+1\right)\frac{3}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{3k}{n}\right)^2+1\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9k^2}{n^2}+1\right)\\ &= \frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(1)\\ &= \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{3}{n}\right)(n) = \frac{27}{6}\frac{n}{n}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} + 3 = \frac{9}{2}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3.\end{aligned}$$

Hence the area is

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3\right) = \frac{9}{2}(1+0)(2+0)+3 = \frac{9}{2}(1)(2)+3 = \boxed{12}$$

p.83, pr.40

(b) 10 Puan $[0,1]$ aralığında $f(x) = 3x^2 - 3$'ün ortalama değerini bulunuz.

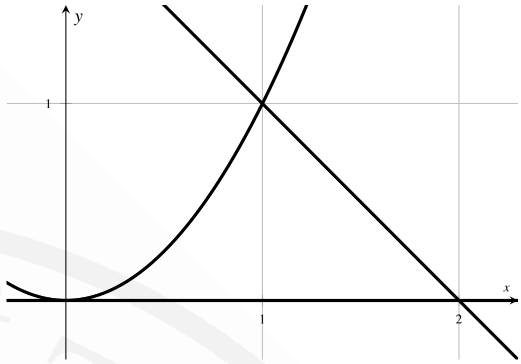


Solution: We have

$$\begin{aligned}\mathrm{av}(f) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (3x^2-3)\,dx\\ &= 3\int_0^1 x^2\,dx - 3\int_0^1 dx\\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3\left[\frac{x}{1}\right]_0^1\\ &= 3\left(\frac{1^3}{3}\right) - 3(1-0) = \boxed{-2}\end{aligned}$$

p.695, pr.37

3. (a) $\boxed{\text{13 Puan}}$ $y = x^2$ parabolü, $x + y = 2$ doğrsu ve x-ekseni ile ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



Solution: We want the area between the x-axis and the curve $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ *plus* the area of a triangle (formed by $x + y = 2$, $x = 1$, and $y = 0$) with base 1 and height 1. Thus,

$$\begin{aligned}\text{TOTAL AREA} &= \int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}(1)(1)\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

p.879, pr.42

(b) $\boxed{\text{14 Puan}}$ $\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx$ integralini bulunuz.

Solution: Let $u = x - 5$. Then $du = dx$ and $x + 5 = u + 10$. Therefore

$$\begin{aligned}\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx = \int (u+10)(u)^{1/3}\,du = \int (uu^{1/3} + 10u^{1/3})\,du &= \int (u^{4/3} + 10u^{1/3})\,du\\ &= \left[\frac{u^{4/3+1}}{4/3+1} + 10\frac{u^{1/3+1}}{1/3+1}\right] + C = \frac{3}{7}u^{7/3} + \frac{15}{2}u^{4/3} + C\\ &= \boxed{\frac{3}{7}(x-5)^{7/3} + \frac{15}{2}(x-5)^{4/3} + C}\end{aligned}$$

p.112, pr.26

4. $y = \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = -x - 1 + \dfrac{2x-2}{x-x^2}$, $\quad y' = \dfrac{2}{x^2} - 1$ ve $\quad y'' = -\dfrac{4}{x^3}$ veriliyor.

(a) $\boxed{\text{2 Puan}}$ *Tanım kümesini* yazınız.

Solution: The domain of f is $\boxed{(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \{0, 1\}}$.

p.241, pr.45

(b) $\boxed{\text{7 Puan}}$ *Asimptotları* bulunuz.

Solution: For vertical asymptotes, there are two candidates: $x = 0, x = 1$. We have $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = \lim\limits_{x\to1^\pm} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 2)}{\cancel{(x-1)}(-x)} =$ $\lim\limits_{x\to1^\pm} \dfrac{x^2 + x + 2}{-x} = \dfrac{1^2 + 1 + 2}{-1} = -4 \neq \pm\infty$,

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = -\infty$. From these we see that the graph has *one vertical asymptote at* $x = 0$. Next *there is no horizontal asymptote* as $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = \mp\infty$. But as

$$\frac{x^3 + x - 2}{x - x^2} = -x - 1 + \frac{2x - 2}{x - x^2}$$

the line $y = -x - 1$ is an oblique asymptote.

p.212, pr.85

(c) $\boxed{\text{5 Puan}}$ Fonksiyonun *arttığı* ve *azaldığı aralıkları* bulunuz. *Yerel maksimum* ve *minimum* değerleri bulunuz.

Solution: We have $y' = -1 + \dfrac{2}{x^2} = 0$ if and only if $x^2 = 2$, that is iff $x = -\sqrt{2}$ and $x = \sqrt{2}$ are the critical points. Note that

$$y' \text{ is } \begin{cases} > 0, & \text{on } (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \quad \text{y is increasing} \\ < 0, & \text{on } (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \quad \text{y is decreasing} \end{cases}$$

Thus, y is decreasing on $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ and increasing on $(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$. Moreover, at the point $x=\sqrt{2}$ graph has a local local maximum and at $x=-\sqrt{2}$ graph has a local minimum. p.212, pr.85

(d) 5 Puan Grafiğin *aşağı konkav* ve *yukarı konkav* olduğu *aralıkları* bulunuz. Varsa, *büküm noktalarını* yazınız.

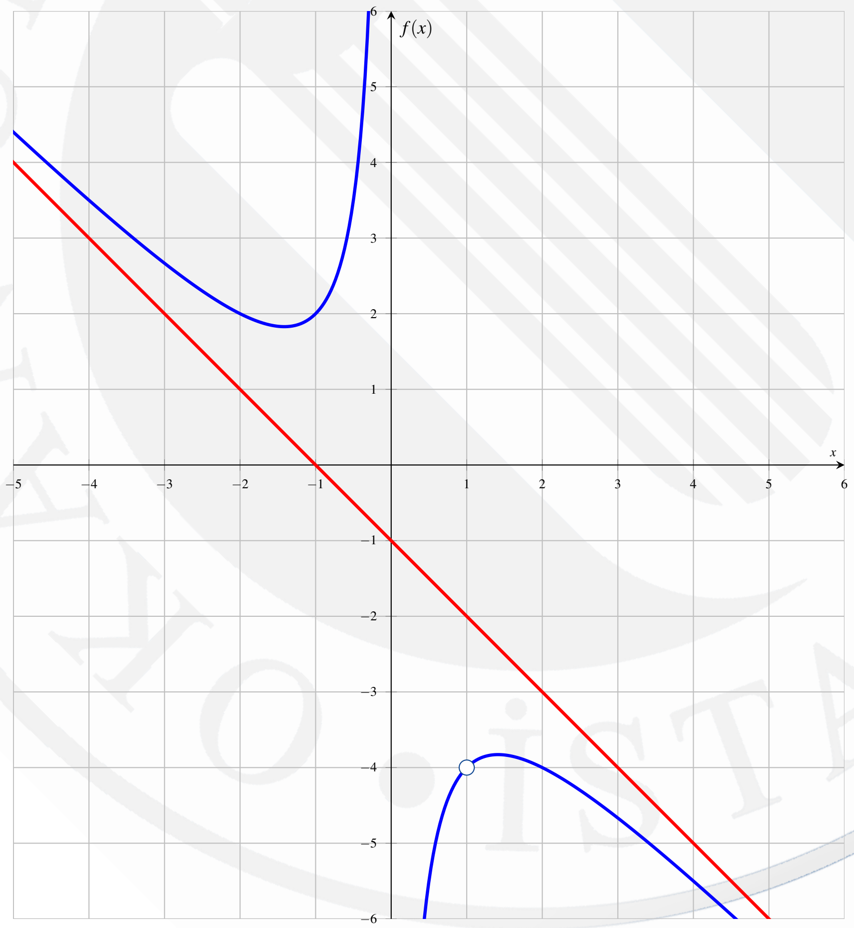
Solution: We have $y'' = -\dfrac{4}{x^3}$ and so

$$y'' \begin{cases} > 0, & \text{on } (-\infty,0) \quad \text{y is concave up} \\ < 0, & \text{on } (0,\infty) \quad \text{y is concave down} \end{cases}$$

Hence f is concave up on $(-\infty,0)$ and concave down on $(0,\infty)$. Also graph has *no point of inflection* there is no tangent line at $x=0$. p.212, pr.85

(e) 7 Puan Fonksiyonun *grafiğini çiziniz*. Asimptotları, dönüm ve büküm noktalarını belirtiniz.

Solution:



p.212, pr.85