



Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta “gidiş yolu” belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz.**
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	25	
3	27	
4	24	
Toplam	100	

1. (a) **12 Puan** $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) dt$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \sqrt{t} + 3$ ve böylece $du = \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ olsun.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) dt &= 2 \int \cos(\sqrt{t} + 3) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int \cos(u) du = 2 \sin u + C = \boxed{2 \sin(\sqrt{t} + 3) + C} \end{aligned}$$

p.652, pr.3

- (b) **12 Puan** $G(x) = \int_{x^2}^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ ise $G'(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm: $u = x^2$ ve $\frac{du}{dx}$ olduğunda, Kalkülüsün Temel Teoremi2ni de kullanarak,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(- \int_1^{x^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \right) = - \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \right) \\ &= - \frac{d}{du} \int_1^u \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \frac{du}{dx} \\ &= - \left[\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] (2x) = \boxed{-2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

p.94, pr.33

2. (a) **11 Puan** $-1/2 \leq y \leq 1/2$ için $x = \sqrt{1-y^2}$ eğrisinin uzunluğunu veren integrali yazınız ama HESAPLAMAYINIZ.

Çözüm: Önce $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ türevini alıp sonra da istenen uzunluğu veren integrali

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}} dy = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1}{1-y^2}} dy = \int_{-1/2}^{1/2} (1-y^2)^{-1/2} dy$$

olarak buluruz.

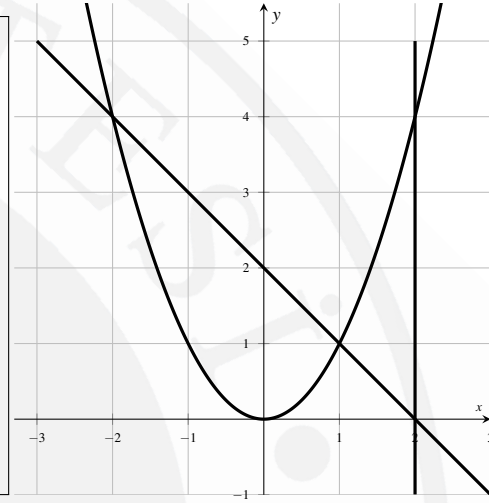
p.83, pr.40

- (b) **14 Puan** $y = x^2$, $y = -x + 2$ ve $-2 \leq x \leq 2$ ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{TOPLAM ALAN} &= \int_{-2}^1 (-x + 2 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - (-x + 2)) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{2} + 4 + \frac{8}{3} \right) + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

p.94, pr.10

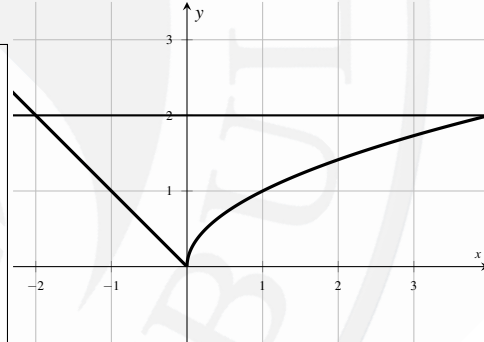


3. (a) **13 Puan** Kabuk metodu kullanarak $x = y^2$, $x = -y$, $y = 2$ ve $y \geq 0$ eğrileri arasındaki bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: $c = 0$, $d = 2$;

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yarıçapı} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yüksekliği} \end{array} \right) dy \\ &= \int_0^2 2\pi y[y^2 - (-y)] dy \\ &= 2\pi \int_0^2 (y^3 + y^2) dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = 16\pi \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3} \right) = 16\pi \left(\frac{5}{6} \right) \\ &= \frac{40\pi}{3} \end{aligned}$$

p.94, pr.10



- (b) **14 Puan** $\int \frac{x^5 - x + 6}{x^2} dx$ integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x + 6}{x^2} dx &= \int \left(\frac{x^5}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{6}{x^2} \right) dx = \int \left(x^3 - \frac{1}{x} + 6x^{-2} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \ln|x| + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\ &= \frac{x^4}{4} - \ln|x| - \frac{6}{x} + C \end{aligned}$$

p.112, pr.26

4. $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ ve türevleri $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ ve $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ veriliyor. Buna göre:

- (a) **3 Puan** Fonksiyonun tanım kümesini yazınız.

Çözüm: Tanım kümesi $(-\infty, +1) \cup (+1, +\infty)$.

p.212, pr.92

- (b) **5 Puan** Fonksiyonun arttığı ve azaldığı aralıkları bulunuz. Yerel maksimum ve minimum değerleri bulunuz.

Çözüm: $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0$ ancak ve ancak $(x-1)^2 = 1$, yani $x = 0$ ve $x = 2$ kritik noktalardır.

$$y' \text{ is } \begin{cases} > 0, & \text{eğer } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) & \text{y artan} \\ < 0, & \text{eğer } x \in (0, 1) \cup (1, 2) & \text{y azalan} \end{cases}$$

Yani $(0, 1) \cup (1, 2)$ üzerinde y azalan ve $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ üzerinde de grafik azalan oluyor. Ayrıca, $(0, 0)$ noktası bir yerel maksimum ve $(2, 4)$ noktası da bir yerel minimumdur..

p.212, pr.85

- (c) **5 Puan** Grafiğin aşağı konkav ve yukarı konkav olduğu aralıkları bulunuz. Varsa, büküm noktalarını yazınız.

Çözüm: $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ olduğundan

$$y'' \begin{cases} > 0, & \text{eğer } x \in (1, +\infty) & \text{y yukarıya konkav} \\ < 0, & \text{eğer } x \in (-\infty, 1) & \text{y aşağıya konkav} \end{cases}$$

Buradan f fonksiyonu $(1, +\infty)$ üzerinde yukarıya konkav ve $(-\infty, 1)$ üzerinde de aşağıya konkavdır. Grafiğin hiç büküm noktası yoktur çünkü $x = 1$ iken teğeti yoktur..

p.241, pr.45

- (d) **5 Puan** Asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: İlk olarak $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$. Buradan da görüyoruz ki grafiğin $x = 1$ de bir dikey asimptotu var.

Sonra yatay asimptotu yok çünkü $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \pm\infty$. Fakat eğik asimptot var. Aslında

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

olduğundan $y = x + 1$ doğrusu bir eğik asimptot olur.

- (e) **6 Puan** Grafiğini verilen sistem üzerinde çiziniz.

