Cep telefonunuzu gözetmene teslim ediniz / Deposit your cell phones to invigilator

Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 90 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	20	
2	25	
3	30	
4	25	
Toplam	100	

1. (a) 10 Puan $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+4)}$ serisinin toplamını bulunuz.

Solution:

$$\frac{-2}{n(n+1)} = \frac{-2}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \left(\frac{-2}{2}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-2}{3}+\frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{-2}{n-1}+\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{-2}{n}+\frac{2}{n+1}\right) = -1 + \frac{2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{2}{n+1}\right) = \boxed{-1}$$

p.650, pr.20

(b) 10 Puan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Solution: Let $x = 3\sin\theta$ where $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Then $dx = 3\cos\theta\, d\theta$ and $\frac{x}{3} = \sin\theta$ so $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$. Then

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}} = \int \frac{3\cos\theta}{3\cos\theta}\, d\theta = \int d\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

p.532, pr.36

2. (a) 14 Puan $x+2y+z-1=0$ ve $x-y+2z+7=0$ düzlemlerinin kesiştiği doğruya paralel uzunluğu 2 olan bir vektör bulunuz.

Solution: A vector parallel to the line of intersection is

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \boxed{\frac{2}{35}(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})} \text{ is the desired vector.}$$

p.749, pr.53

(b) 11 Puan $x = 7$ ve $x + y + \sqrt{2}\,z = -3$ düzlemleri arasındaki dar açıyı bulunuz.

Solution:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \text{ and } \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{k}$$

$\Rightarrow$ the desired angle is

$$\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}\right) = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

p.748, pr.41

3. (a) 15 Puan $f(x,y,z) = \ln(2x+3y+6z)$'nin $P_0(-1,-1,1)$ noktasında en hızlı azaldığı yönü bulunuz ve bu yöndeki türevi bulunuz. Ayrıca $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ yönündeki türevi bulunuz.

Solution:

$$\nabla f = \left(\frac{2}{2x+3y+6z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{2x+3y+6z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{6}{2x+3y+6z}\right)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \nabla f|_{(-1,-1,1)} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k};$$

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{|2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

$\Rightarrow$ f decreases most rapidly in the direction $-\mathbf{u} = -\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$;

$$\Rightarrow (D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -|\nabla f| = -7;$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = (D_{\mathbf{u}_1}f)_{P_0} = \boxed{7}$$

p.879, pr.39

(b) 15 Puan $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ yüzeyine $(1,1,1/2)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini yazınız.

Solution:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\left(x^2+y^2\right)^{-2} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1/2)} = -\frac{1}{2} \text{ and}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\left(x^2+y^2\right)^{-2} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1/2)} = -\frac{1}{2};$$

thus the tangent plane is

$$-\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y+2z-3=0}$$

p.879, pr.50

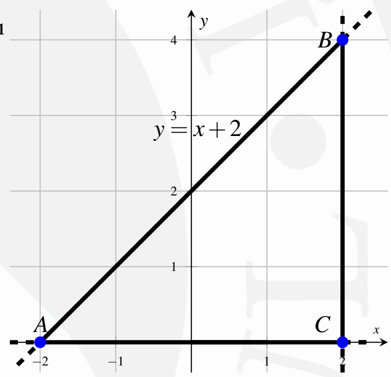
4. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ Lagrange çarpan kullanarak, $f(x,y,z) = x - y + z$ fonksiyonunun $x^2+y^2+z^2 = 1$ küresi üzerindeki maksimum ve minimum noktaları bulunuz.

Solution: $\nabla f = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ so that $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) \Rightarrow 1 = 2x\lambda$, $-1 = 2y\lambda$, and $1 = 2z\lambda \Rightarrow x = -y = z = \frac{1}{\lambda}$. Thus $x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ yielding the points $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ and $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Evaluations give the absolute maximum value of
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
and the absolute minimum value of
$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

p.880, pr.83

(b) $\boxed{\text{13 Puan}}$ $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$ fonksiyonunun $y = 0$, $x = 2$, $y = x+2$ doğruları ile sınırlı bölge üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.



Solution: Let the vertices be $A(-2,0)$, $B(2,4)$, $C(2,0)$.

Along AB, $f(x,y) = f(x,x+2) = -2x+4$ for $-2 \le x \le 2$;
$f'(x,x+2) = -2 = 0 \Rightarrow$ no critical points in the interior of AB;
Endpoints: $f(-2,0) = 8$ and $f(2,4) = 0$.

Along BC, $f(x,y) = f(2,y) = -y^2+4y$ on $0 \le y \le 4$;
$f'(2,y) = -2y+4 = 0 \Rightarrow y = 2$ is and interior critical point of BC with;
$f(2,2) = 4$.
Endpoints: $f(2,0) = 0$ and $f(2,4) = 0$.

Along AC, $f(x,y) = f(x,0) = x^2 - 2x$ for $-2 \le x \le 2$;
$f'(x,0) = 2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1$ and $y = 0$; $(1,0)$ is an interior critical point of AC with $f(1,0) = -1$,
$f(0,1) = 3$ and $f(1,0) = 5$ interior critical points;
Endpoints: $f(-2,0) = 8$ and $f(-2,0) = 8$.

For interior points of the triangular region, $f_x(x,y) = 2x-2 = 0$ and $f_y(x,y) = -2y+4 = 0 \Rightarrow y = 2$
and $x = 1$ which is an interior critical point with $f(1,2) = 3$. Therefore the absolute maximum is 8 at $(-2,0)$ and the absolute minimum is -1 at $(1,0)$.

p.880, pr.75