Your Name / Adınız - Soyadınız

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek. **Limit, türev ve integral alırken nasıl yaptığınızı belirtiniz**.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakikadır.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Sonuç
1	24	
2	27	
3	27	
4	22	
Toplam	100	

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) 12 Puan $\int \sec^2\theta \sin^3\theta \, d\theta$,

Solution: If we let $u = \cos\theta$, then $du = -\sin\theta \, d\theta$. Therefore

$$\begin{aligned}\int \sec^2\theta \sin^3\theta \, d\theta &= \int \frac{1}{\cos^2\theta}\sin^2\theta \sin\theta \, d\theta = \int \frac{1-\cos^2}{\cos^2\theta}\sin\theta \, d\theta = \int \frac{u^2-1}{u^2} \, du \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du \\ &= u + \frac{1}{u} + C = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} + C = \boxed{\cos\theta + \sec\theta + C}\end{aligned}$$

p.491, pr.86

(b) 12 Puan $\int x^2 \ln x \, dx$

Solution: We shall integrate by parts. For let $u = \ln x$ and so $dv = x^2 \, dx$. Then $du = \frac{1}{x} \, dx$ and choose $v = \frac{x^3}{3}$. Hence

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du &= (\ln x)\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C = \boxed{\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C}\end{aligned}$$

p.491, pr.86

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$

Solution: Let $x = 3\sin\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ and so $\mathrm{d}x = 3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$ and also $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$;

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{3\cos\theta} = \int \mathrm{d}\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\frac{x}{3} + C}$$

p.491, pr.86

(b) $\boxed{\text{15 Puan}}$ $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}}$

Solution: The bad point is at $x = 1$. Hence

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}} = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}} + \lim_{b\to 1^+}\int_b^2 \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{2/3}} \\
&= \lim_{a\to 1^-}\left[\frac{(y-1)^{-2/3+1}}{-2/3+1}\right]_0^a + \lim_{b\to 1^+}\left[\frac{(y-1)^{-2/3+1}}{-2/3+1}\right]_b^2 \\
&= \lim_{a\to 1^-}\left[\frac{(a-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(0-1)^{1/3}}{1/3}\right] + \lim_{b\to 1^4}\left[\frac{(2-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(b-1)^{1/3}}{1/3}\right] \\
&= \frac{(1-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(-1)^{1/3}}{1/3} + \frac{(2-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(1-1)^{1/3}}{1/3} = 0+3+3+0 = \boxed{6}
\end{aligned}$$

p.491, pr.86

3. (a) $\boxed{\text{14 Puan}}$ Limitin tanımını kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+5n} = -\frac{1}{5};$$

olduğunu ispatlayınız, yani verilen $\varepsilon > 0$ için $n > N \Rightarrow \left|\frac{1-n}{1+5n} + \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı bulunuz.

Solution: Given any $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - L| = \left|\frac{1-n}{1+5n} + \frac{1}{5}\right| = \frac{6}{5(1+5n)} < \varepsilon$$

for all n such that $1+5n > \frac{6}{5\varepsilon}$ or $5n > \frac{6}{5\varepsilon} - 1$ or $n > \frac{6}{25\varepsilon} - \frac{1}{5}$. Hence we may choose N any positive integer greater than $\frac{6}{25\varepsilon} - \frac{1}{5}$. For example, choosing $\varepsilon = 10^{-3}$ for every positive integer $n > \frac{6000}{25} - \frac{1}{5} = 240 - \frac{1}{5} = \frac{1119}{5} \approx 223.8$, namely, for all $n \geq 224$.

p.583, pr.17

(b) $\boxed{\text{13 Puan}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Solution: We can use the nth Term Test to conclude that the series diverges.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+5n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Hence the series *diverges*.

p.94, pr.34

4. (a) $\boxed{\text{12 Puan}}$ İntegral Test kullanarak, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ serisinin yakınsaklığını araştırınız.

○ Yakınsak. ○ Iraksak. Kullanılan Test: __________

Solution: If we let $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ where $x \geq 2$, then f is positive, continuous and decreasing on$[2, \infty)$ and we may apply the integral test. Since

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln x)\big|_2^b = +\infty$$

p.573, pr.38

(b) $\boxed{\text{10 Puan}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n 3^{n-1}}$ serisinin yakınsaklığını araştırınız.

○ Yakınsak. ○ Iraksak. Kullanılan Test: __________

Solution: Let $u_n = \frac{2^{n+1}}{n 3^{n-1}} > 0$. Then $|u_n| = u_n$ for every $n \geq 1$. Ratio Test gives

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)3^n}}{\frac{2^{n+1}}{n 3^{n-1}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{n+1} \cdot 2}{(n+1) 3^{n-1} \cdot 3} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{2^{n+1}} \right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{3n+3} \right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Since $\rho < 1$, by Ratio Test, the series *converges*.

p.83, pr.52