Mat 114 Yaz 2016 **İkinci Arasınav** 27 Temmuz 2016

Your Name / Ad - Soyad (**75 dak.**) Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci No (**mavi tükenmez!**)

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	30	20	25	25	100
Sonuç					

Sınav süresi **75 dakika**. Cevap için ayrılan yer yetmiyorsa, sınav kağıdınızdaki boş yerleri kullanabilirsiniz. Cevaplarınızı **AÇIKLAMALISINIZ**. Yeterince açıklanmamış cevaplar –sonuç doğru olsa bile– ya hiç puan alamayacak ya da çok az puan alacak.

---

1. Aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) (10 Puan) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{16\tan^{-1}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ integralini hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{16\tan^{-1}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{16\tan^{-1}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[8(\tan^{-1}x)^2\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(8\left(\tan^{-1}b\right)^2 - 8\left(\tan^{-1}0\right)^2\right)\\ &= 8\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 8(0)^2 = \boxed{2\pi^2}\end{aligned}$$

The integral converges.

p.72, pr.15

(b) (10 Puan) $a_n = \sqrt[n]{10n}$ ise $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Solution: We have

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(10n)^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty}(10)^{1/n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right) = (1)(1) = \boxed{1}$$

p.94, pr.10

(c) (10 Puan) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n} =$ *serisinin toplamını* bulunuz.

Solution: First notice that

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right) = 2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \frac{16}{125} + \cdots = 2\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots\right);$$

So we have, as $|r| = 2/5 < 1$, this series converges and has sum

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2^n}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-2/5} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

p.94, pr.34

2. (a) (12 Puan) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{e^n + n}$ serisi yakınsak mıdır? Araştırınız.

Solution:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

Thus by nTT (*n*th term test), the series DIVERGES.

p.551, pr.32

Kullandığınız testin adını yazınız.

(b) (8 Puan) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ serisi yakınsak mıdır? Araştırınız.

Solution: Let $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ for $x \geq 2$. Then on $[2, \infty]$, $f(x)$ is positive, continuous and decreasing. Moreover

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \boxed{\frac{1}{\ln 2}}
\end{aligned}$$

Therefore the integral converges. Hence by the Integral Test, the series converges too.

p.82, pr.35

Kullandığınız testin adını yazınız.

3. (a) (12 Puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$ serisi yakınsak mıdır? Araştırınız.

Solution: Let $a_n = \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)} > 0$ and choose $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$. Then if we use the Limit Comparison Test, we have

$$\begin{aligned} c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2+n}{n^2+3n+2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{10+1/n}{1+3/n+2/n^2} = 10 \end{aligned}$$

Kullandığınız testin adını yazınız.

Now $0 < c = 10 < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is a convergent p-series $(p = 2 > 1)$. Hence by part (a) of Limit Comparison Test, the given series converges too.

p.72, pr.8

(b) (13 Puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ serisi yakınsak mıdır? Araştırınız. *Yol Gösterme:* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Solution: Let $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} > 0$ for every $n >$. We wish to use the Root Test. Now

$$\begin{aligned} \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Kullandığınız testin adını yazınız.

Thus the series converges by the Root Test.

p.584, pr.15

4. (a) (13 Puan) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$ serisi *mutlak yakınsak mıdır, şartlı yakınsak mıdır veya ıraksak mıdır*? Araştırınız.

Solution: Let $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^3+1}$. Then $|a_n|=\dfrac{n}{n^3+1}$. Hence

$$|a_n|=\frac{n}{n^3+1}\le\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

the series of absolute values converges by the Direct Comparison Test with the convergent p-series $\sum\dfrac{1}{n^2}$. Therefore the given series converges absolutely.

p.95, pr.68

Kullandığınız testin adını yazınız.

(b) (12 Puan) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^n(2n)!}x^n$ serisinin *yakınsaklık yarıçapını* bulunuz.

Solution: Let $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2^n(2n)!}x^n$ and so $u_{n+1}=\dfrac{((n+1)!)^2}{2^{n+1}(2(n+1))!}x^{n+1}=\dfrac{(n+1)n!(n+1)(n)!}{2^n2(2n+2)(2n+1)(2n)!}x^nx$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)n!(n+1)(n)!}{2^n2(2n+2)(2n+1)(2n)!}x^nx}{\dfrac{(n!)^2}{2^n(2n)!}x^n}\right|<1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{n!}\cancel{(n+1)}\cancel{(n)!}}{\cancel{2^n}2\cdot2\cancel{(n+1)}(2n+1)\cancel{(2n)!}}\cancel{x^n}_1x\frac{\cancel{2^n}\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}\cancel{n!}\cancel{x^n}}\right|<1$$

$$\Rightarrow|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{4(2+1/n)}<1$$

$$\Rightarrow|x|<8\Rightarrow\boxed{R=8}$$

p.583, pr.39

Sadece yakınsaklık yarıçapı bulunacak, başka birşey istenmiyor.