

Your Name / Ad - Soyad

Signature / İmza

 (75 dak.)

Student ID # / Öğrenci No

 (mavi tükenmez!)

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	30	25	25	20	100
Sonuç					

Sınav süresi 75 dakika. Cevap için ayrılan yer yetmiyorsa, sınav kağıdınızdaki boş yerleri kullanabilirsiniz. Cevaplarınızı AÇIKLAMALISINIZ. Yeterince açıklanmamış cevaplar –sonuç doğru olsa bile– ya hiç puan alamayacak ya da çok az puan alacak.

1. (a) (10 Puan) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$ limitini hesaplayınız.

Solution: Multiplying and dividing by the conjugate, we have

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 12} - 4)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 12) - 16}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = \frac{4}{\sqrt{16} + 4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

L'Hôpital Kuralı kabul edilmeyecektir.

- (b) (10 Puan) $g(x) = \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$ fonksiyonunun $x \rightarrow \infty$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken limitini bulunuz.

Solution: We have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{31}{x^6}}{1} = 0$$

and

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{31}{x^6}}{1} = 0$$

L'Hôpital Kuralı kabul edilmeyecektir.

- (c) (10 Puan) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc(2x)}{\cos(5x)}$ limitini hesaplayınız.

Solution:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc(2x)}{\cos(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} \right) = \left(\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(5x)} \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right) (1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. (a) (13 Puan) $f(x) = -3x - 2$, $x_0 = -1$ ve $\varepsilon = 0.03$ pozitif sayısı veriliyor. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$ limitini bulunuz. Sonra her x için, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz.

Solution: First the limit is $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x - 2) = (-3)(-1) - 2 = 1$. Then

$$\text{Step 1 : } |(-3x - 2) - 1| < 0.03 \Rightarrow -0.03 < -3x - 3 < 0.03 \Rightarrow 0.01 > x + 1 > -0.01 \Rightarrow -1.01 < x < -0.99$$

$$\text{Step 2 : } |x - (-1)| < \delta \Rightarrow -\delta < x + 1 < \delta \Rightarrow -\delta - 1 < x < \delta - 1.$$

$$\text{Then } -\delta - 1 = -1.01 \Rightarrow \delta = 0.01 \text{ or } \delta - 1 = -0.99 \Rightarrow \delta = 0.01; \delta = 0.01.$$

- (b) (6 Puan) Aşağıdaki fonksiyon b nin hangi değerleri her noktada süreklidir?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{b+1} & x < 0 \\ x^2 + b & x > 0 \end{cases}$$

Solution: First the limit is $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x - 2) = (-3)(-1) - 2 = 1$. Then

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-b}{b+1} = \frac{-b}{b+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + b) = b.$$

For $g(x)$ to be continuous we must have

$$\frac{-b}{b+1} = b \Rightarrow b = 0 \text{ or } b = -2.$$

- (c) (6 Puan) $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$ olsun. Ara Değer Teoremi kullanarak f 'nin -2 ve 0 arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.

Solution: First note that f is a polynomial and so continuous everywhere. Moreover $f(-2) = -2 < 0$ and $f(0) = 2 > 0 \Rightarrow f$ has a root between -2 and 0 by the Intermediate Value Theorem.

3. (a) (15 Puan) Türev tanımı kullanarak, $f(x) = 4 - x^2$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevini bulunuz. $f'(3)$ değerini bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4 - (x+h)^2] - (4 - x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4 - x^2 - 2xh - h^2] - 4 + x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2x - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{1} = -2x\end{aligned}$$

Moreover, $f(3) = (-2)(3) = \boxed{-6}$

- (b) (10 Puan) $y = \cos\left(5 \sin\left(\frac{t}{5}\right)\right)$ ise $\frac{dy}{dt}$ türevini bulunuz.

4. (a) (6 Puan) $y = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$ eğrisine $A(6, a)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

- (b) (6 Puan) Parçalı

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x + 7, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu orijinde türevlenebilir mi? Cevabınızı açıklayınız.

- (c) (8 Puan) $x^4 + \sin y = x^3 y^2$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

L'Hôpital
Kuralı
kabul
edilmeye-
cektir.