ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☑ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	30	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 75 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

---

1. $\boxed{\text{20 puan}}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$, $y(3) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü $y = vx$ değişken dönüşümü yardımıyla bulunuz.

Solution: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ denklemini $\dfrac{1 - \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$ olarak düzenleyebiliriz. Dolayısıyla denklem homojen diferansiyel denklemdir. Çözmek için ise $v = \frac{y}{x}$ değişken dönüşümünü uygularız.

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{x^2 - x(vx) + (vx)^2}{x(vx)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} - v = \frac{1 - v}{v}$$

$$\frac{v}{v-1}dv = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{v}{v-1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{v-1}\right) dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow v + \ln|v-1| = -\ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| = -\ln|x| + C$$

Başlangıç koşulunu yerine yazalım. $x = 3$ iken $y = 0$ olmalıdır.

$$y(3) = 0 \Rightarrow \frac{0}{3} + \ln\left|\frac{0}{3} - 1\right| = -\ln|3| + C \Rightarrow C = \ln 3$$

$$\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| = -\ln|x| + \ln 3$$

$$e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x} - 1\right) = \frac{3}{x}$$

2. (a) 15 puan $t > 0$ olmak üzere $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{3}{t}y = \dfrac{\cos t}{t^3}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: Verilen denklem lineer denklemdir. İntegrasyon çarpanını belirleyelim.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\ln t} = t^3$$

bulunur.Verilen diferansiyel denklemi $\mu(t)$ ile çarpalım.

$$t^3\frac{dy}{dt} + 3t^2y = \cos t$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^3y\right) = \cos t \Rightarrow t^3y = \int \cos t dt \Rightarrow t^3y = \sin t + C \Rightarrow y(t) = \frac{\sin t + C}{t^3}$$

(b) 15 puan i. $y' = y(4-y^2)$ diferansiyel denkleminin kritik noktalarını bulunuz.

ii. $y' = y(4-y^2)$ diferansiyel denkleminin doğrultu alanını çiziniz.(121 tane ok kullanmanız beklenmektedir.)

iii. Denklemin çözümlerinin kritik noktalara yakınsayıp yakınsamadığını belirleyiniz.

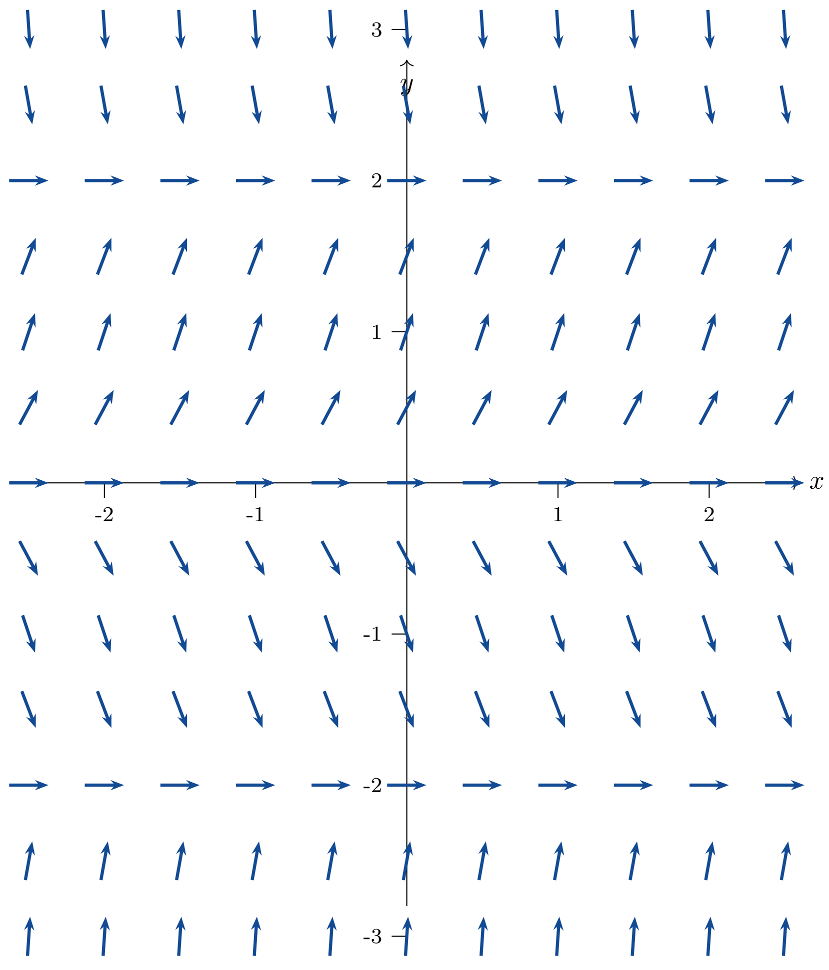
Solution:

i. $y = 0$, $y = 2$ ve $y = -2$ noktalarında $y' = 0$ olur. Yani $y = 0$, $y = 2$ ve $y = -2$' de denklemin denge çözümleri bulunur.

ii. y' artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

$-2 < y < 0$ veya $y > 2$ ise $y' < 0$ 'dır ve fonksiyon azalandır.

$y < -2$ veya $0 < y < 2$ ise $y' > 0$ 'dır ve fonksiyon artandır.



iii. Doğrultu alanından görüldüğü gibi $y = -2$ ve $y = 2$ çözümleri asimptotik kararlı, $y = 0$ çözümü ise kararsızdır.

3. $\boxed{\text{25 puan}}$ $y''' - 2y'' + y' = 12e^x + 5$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: Öncelikle $y''' - 2y'' + y' = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirleyelim. Denklemin karakteristik denklemi $r^3 - 2r^2 + r = 0$'dir, köklerini ise $r_1 = 0$ ve $r_2 = r_3 = 1$ olarak buluruz. Buna göre homojen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$$

olarak bulunur. $y_p(x)$'i ise belirsiz katsayılar ile bulalım.

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^2e^x + Bx \\ y_p'(x) &= 2Axe^x + Ax^2e^x + B \\ y_p''(x) &= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \\ y_p'''(x) &= 6Ae^x + 6Axe^x + Ax^2e^x \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Verilen diferansiyel denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y''' - 2y'' + y' = \left[6Ae^x + 6Axe^x + Ax^2e^x\right] - 2\left[2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x\right] + \left[2Axe^x + Ax^2e^x + B\right] \\ = (6A - 4A)e^x + (6A - 8A + 2A)xe^x + (A - 2A + A)x^2e^x + B \\ \Rightarrow y''' + 6y'' + 9y' = 12e^x + 5 \\ 2Ae^x + B = 12e^x + 5 \\ \Rightarrow 2A = 12 \Rightarrow A = 6 \\ \Rightarrow B = 5 \Rightarrow B = 5 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $y_p(x) = 6x^2e^x + 5x$ olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x - 2x^2e^x + 5x$$

denklemidir.

4. 25 puan $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: Öncelikle $y'' - 2y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirleyelim. Denklemin karakteristik denklemi $r^2 - 2r + 2 = 0$'dir, köklerini ise $r_1 = 1 + i$ ve $r_2 = 1 - i$ olarak buluruz. Buna göre homojen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

olarak bulunur. Özel çözümünü ise parametrelerin değişimi metodu ile bulalım. Buna göre $y_p(x) = u_1 e^x \cos x + u_2 e^x \sin x$ olur ve çözmemiz gereken denklem sistemi ise

$$\begin{aligned} u_1' e^x \cos x + u_2' e^x \sin x = 0 \\ u_1' e^x \cos x - u_1' e^x \sin x + u_2' e^x \sin x + u_2' e^x \cos x = e^x \sec x \\ \text{yani} \\ u_1' e^x \cos x + u_2' e^x \sin x = 0 \\ -u_1' e^x \sin x + u_2' e^x \cos x = e^x \sec x \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu denklem sistemini çözdüğümüzde $u_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ve $u_2' = 1$ elde ederiz. Buna göre integral alındığında $u_1 = ln\,|\cos x|$ ve $u_2 = x$ olarak bulunur.

$$y_p(x) = e^x \cos x ln\,|\cos x| + x e^x \sin x$$

Genel çözüm ise $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ yani

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + e^x \cos x ln\,|\cos x| + x e^x \sin x$$

olarak belirlenir.