Cep telefonunuzu gözetmene teslim ediniz / Deposit your cell phones to invigilator

Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

Professor's Name / Öğretim Üyesi

- Kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci sınavdan **0 (sıfır)** not almış sayılır.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 70 dakika.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

Elementer Laplace Dönüşümleri: $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{L}\{f(t)\}$ mevcut ve $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ olarak alalım.

- $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}, s > 0$
- $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a},\ s > a,$
- $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0,$
- $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
- $\mathscr{L}\{e^{at}\sin bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
- $\mathscr{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
- $\mathscr{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
- $\mathscr{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > |a|$
- $\mathscr{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > |a|$
- $\mathscr{L}\{f(ct)\} = \dfrac{1}{c}F(\dfrac{s}{c}),\ c > 0$
- $\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathscr{L}\{f(t)\}$
- $\mathscr{L}\{u_c(t)\} = \dfrac{e^{-cs}}{s},\ s > 0$
- $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- $\mathscr{L}\{e^{at}\cos bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

1. (a) $\boxed{\text{5 puan}}$ $f(t) = 2 - t^3 + 4\sin 5t - 2e^{4t}$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümünü bulunuz.

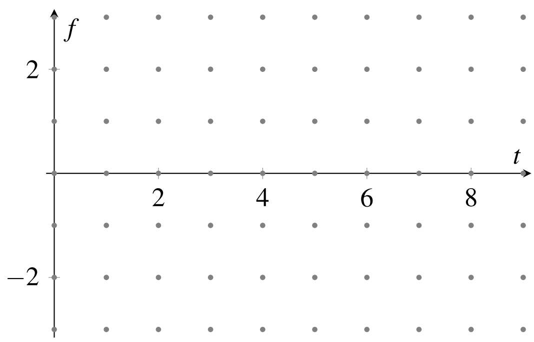
Solution: $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\left\{2 - t^3 + 4\sin 5t - 2e^{4t}\right\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{3!}{s^4} + 4\dfrac{5}{s^2+25} - 2\dfrac{1}{s-4}, s > 4$

(b) $\boxed{\text{20 puan}}$ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ -1, & 3 \le t < 5 \\ 2, & 5 \le t < 7 \\ 1, & 7 \le t \end{cases}$ fonksiyonunu ele alalım.

(5 puan) $f(t)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

(5 puan) $f(t)$ fonksiyonunu, $u_c(t)$, birim basamak fonksiyonları cinsinden yazınız.

(10 puan) $f(t)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümünü bulunuz.



Solution:
$f(t)$ fonksiyonunu, $u_c(t)$ birim basamak fonksiyonu cinsinden ifade edelim.

$$f(t) = -u_3(t) + 3u_5(t) - u_7(t)$$

Buna göre $f(t)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{-u_3(t) + 3u_5(t) - u_7(t)\} = -\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-7s}}{s}$$

olarak bulunur.

2. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2-2s+2}$ fonksiyonunun ters Laplace Dönüşümünü bulunuz.

Solution:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-2s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{2\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + 5\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} = 2e^{-t}\cos t + 5e^{-t}\sin t$$

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $F(s) = \dfrac{s^2+1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$.fonksiyonunun ters Laplace Dönüşümünü bulunuz.

Solution:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{S+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3}\right\}$$

$$\Rightarrow s^2+1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 1, C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{S+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

3. $\boxed{\text{25 puan}}$ $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ başlangıç değer problemini Laplace Dönüşümü kullanarak çözünüz.

Solution: Verilen diferansiyel denklemin Laplace Dönüşümünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{y'' + 2y' + y\right\} &= \mathscr{L}\left\{4e^{-t}\right\} \\
\left[s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[s\mathscr{L}\{y\} - y(0)\right] + \mathscr{L}\{y\} &= \frac{4}{s+1} \\
(s^2 + 2s + 1)\mathscr{L}\{y\} - 2s + 1 - 4 &= \frac{4}{s+1} \\
(s+1)^2\mathscr{L}\{y\} &= \frac{4}{s+1} + 2s + 3 \\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{2s^2 + 5s + 7}{(s+1)^3} \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 5s + 7}{(s+1)^3}\right\}
\end{aligned}$$

Let us write

$$\frac{2s^2 + 5s + 7}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$\Rightarrow 2s^2 + 5s + 7 = A(s+1)^2 + B(s+1) + Cs = -1 \Rightarrow 4 = C$$

$$\Rightarrow 2s^2 + 5s + 3 = A(s+1)^2 + B(s+1) \Rightarrow (s+1)(s+3) = (s+1)\left[A(s+1) + B\right] \Rightarrow s = -1 \Rightarrow B = 2 \text{ and } A = 1$$

$$\frac{2s^2 + 5s + 7}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^3}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 5s + 7}{(s+1)^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^3}\right\}$$

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t} + 2t^2e{-t}$$

4. $\boxed{\text{25 puan}}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3\pi \\ 0, & 3\pi \le t \end{cases}$ olmak üzere $y'' + 9y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace Dönüşümü kullanarak bulunuz.

Solution: $f(t) = 1 - u_{3\pi}(t)$ fonksiyonun Laplace Dönüşümü $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left\{y'' + 9y\right\} &= \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \\ (s^2+9)\mathscr{L}\left\{y\right\} - 1 &= \frac{1 - e^{-3\pi s}}{s} \\ \mathscr{L}\left\{y\right\} &= \frac{s + 1 - e^{-3\pi s}}{s(s^2+9)} \\ \mathscr{L}\left\{y\right\} &= \frac{s+1}{s(s^2+9)} - \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+9)} \end{aligned}$$

$$\frac{s+1}{s(s^2+9)} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2+9}$$

$$s + 1 = A_1(s^2+9) + (B_1 s + C_1)s \Rightarrow s + 1 = (A_1 + B_1)s^2 + C_1 s + 9A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{9},\ B_1 = -\frac{1}{9},\ C_1 = 1$$

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2 s + C_2}{s^2+9}$$

$$1 = A_2(s^2+9) + (B_2 s + C_2)s \Rightarrow 1 = (A_2 + B_2)s^2 + C_2 s + 9A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{9},\ B_2 = -\frac{1}{9},\ C_2 = 0$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9}\frac{e^{-3\pi s}}{s} - \frac{1}{9}\frac{se^{-3\pi s}}{s^2+9}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{9}u_{3\pi}(t) + \frac{1}{9}u_{3\pi}(t)\cos(3(t-3\pi))$$

$$y(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{9}u_{3\pi}(t) - \frac{1}{9}u_{3\pi}(t)\cos(3t)$$